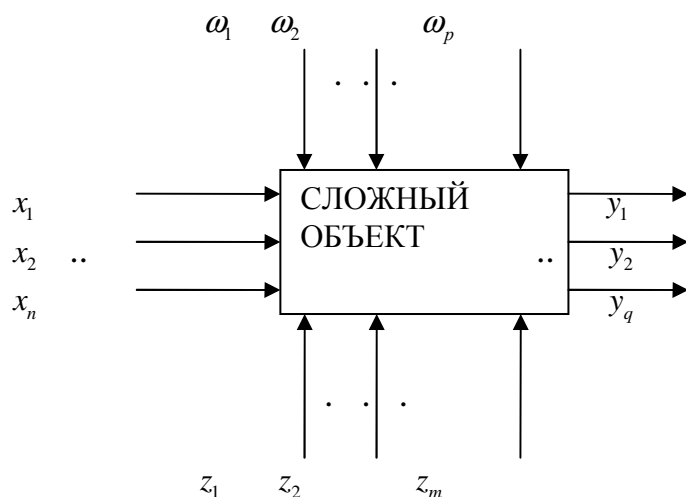


ЛЕКЦИЯ 1

Задачи, решаемые при помощи инженерного и научного эксперимента. Понятие об объекте исследования

Любой технологический процесс или техническое устройство можно представить в виде сложного объекта, характеризующегося большим числом различных состояний, в которых он может находиться. Состояние таких объектов, как правило описывается большим количеством взаимосвязанных переменных.



Переменные сложного объекта, определяющие в своей совокупности его состояние называются **факторами** (или входными переменными - x, ω, z), а переменные характеризующие в своей совокупности его состояние называются **откликами** (или выходными переменными - y).

Для удобства анализа и синтеза таких объектов множество факторов классифицируют на три группы в соответствии с характерными признаками их участия в процессе управления объектом:

1. Контролируемые неуправляемые факторы z - могут лишь контролироваться (измеряться), но не поддаются целенаправленным изменениям (например, температура окружающей среды, влажность воздуха и т. п.).
2. Контролируемые управляемые факторы x - представляют собой воздействия для управления объектом и призваны изменять его состояние в том или ином направлении (например, скорость движения рабочего органа, давление в цилиндре и т. п.).
3. Неконтролируемые (случайные) возмущающие факторы ω . В эту группу включаются факторы, влияние которых на объект оценить невозможно по тем или иным причинам.

Таким образом, инженерную задачу можно представить либо как задачу определения на уже имеющемся объекте значений факторов при которых значения откликов принимают заданное (как правило экстремальное) значение, либо как задачу синтеза (создания) некоторого сложного объекта у которого при заданных значениях контролируемых, управляемых и неуправляемых факторов (или при заданных диапазонах их значения) выходные переменные также должны принимать заданные значения (или изменяться в заданных пределах).

Решение первой задачи достигается совместно при помощи аналитических решений и при помощи эксперимента. В некоторых случаях аналитическая зависимость выходных переменных от входных неизвестна. Тогда задачу можно решить только экспериментально.

Решение второй задачи должно, в общем виде, состоять из следующих этапов:

1. Обязательно производится обзор технической литературы (справочников, каталогов, технических журналов), по возможности – поиск в сети Internet и консультации с коллегами. Очень часто оказывается, что заданный объект уже разработан и производится какими-либо предприятиями и можно просто его приобрести. Может также оказаться, что выпускается несколько различных объектов, удовлетворяющих заданным требованиям. В этом случае необходимо проанализировать все объекты и выявить их дополнительные достоинства и недостатки и выбрать объект, обладающий более существенными достоинствами и меньшими недостатками. Эта задача может быть решена как при помощи теоретического анализа, так и при помощи экспериментальных исследований.

2. Если заданного объекта найти не удалось, часто можно найти подобные, выполняющие такие же функции, но имеющие отличные диапазоны изменения входных и выходных переменных. В этом случае можно попытаться решить задачу, выбрав из подобных объектов один, наиболее близкий по своим характеристикам к заданному, а затем попытаться, изменяя значения факторов, добиться необходимого изменения значения откликов (иногда можно попытаться сделать неуправляемые наблюдаемые факторы управляемыми).

В этом случае необходимо решить две подзадачи:

- а) определить влияет ли данный фактор на данный отклик;
- б) если влияет, то каким образом.

Эти две подзадачи могут также быть решены как при помощи теоретического анализа, так и при помощи проведения экспериментальных исследований.

3. Если ни заданного, ни подобных объектов найти не удалось, можно попытаться разбить его на подобъекты и для каждого из них повторить предыдущие этапы и т. д. В случае неудачи для некоторых подобъекты приходится решать задачу самостоятельно с нуля.

4. После синтеза заданного объекта необходимо определить соответственно полученных характеристик заданным. Эта задача может быть решена только экспериментально. Часто также необходимо определить характеристики надежности. Это можно сделать как экспериментально, так и аналитически.

Таким образом, эксперимент может оказать большую помощь инженеру при решении поставленной задачи. На современном уровне развития науки и техники эксперимент является самым достоверным способом получения исчерпывающих характеристик объекта. Во многих случаях это самый быстрый способ оценки реальных свойств объекта, а в некоторых случаях и единственный.

На основании вышесказанного можно выделить 7 задач, которые могут быть решены при помощи эксперимента:

1. Определить, влияет ли данное входное воздействие на данную выходную переменную.
2. Определить, каким образом данный отклик зависит от наблюдаемых факторов, т. е. найти математическую модель объекта вида:

$$\begin{cases} y_1 = f_1 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_q = f_q \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Такая задача называется **идентификацией**.

3. Определить значения факторов, при которых значения откликов будут равны заданным.
4. Определить значения факторов, при которых значения откликов принимают экстремальные (max или min) значения. Такая задача называется **оптимизацией**.
5. Определить, соответствуют ли реальные характеристики объекта заданным.
6. Определить, можно ли принять какую-то теоретическую методику для расчета реальных свойств объекта.
7. Определить характеристики надежности объекта.

При экстремальных исследованиях сложные объекты классифицируют по некоторым признакам:

1. Объект, любое из различных состояний которого может задаваться и стабилизироваться исследователем по его желанию, называется управляемым, если условие не выполняется – неуправляемым. Объекты инженерных исследований обычно частично управляемы.
2. Если на объект не действуют случайные возмущающие факторы, то он называется детерминированным, если действуют – недетерминированным.
3. Если объект имеет одну входную переменную и одну выходную, то он называется одномерным, если больше одной входной переменной – многомерным.
4. Объект называют статическим, если его состояние в любой момент времени не зависит от предшествующего состояния, а определяется только комбинацией уровней действующих в данный момент факторов, и динамическим, если имеется указанная выше зависимость.

Контролируемые факторы как управляемые, так и неуправляемые могут быть количественными и качественными. Количественными факторами являются переменные, которые можно оценить количественно (измерить). Качественные переменные можно оценить только как больше меньше, либо они вообще представляют собой разновидности рабочих органов и агрегатов.

Пространство управляемых факторов называется факторным пространством.

Зависимость отклика от контролируемых факторов называют функцией отклика. Каждой точке факторного пространства соответствует определенное значение функции отклика. Геометрический образ функции отклика называют поверхностью отклика.

Зависимость отклика от неконтролируемых факторов называют шумом, если изменение во времени этих факторов происходит с большей частотой по сравнению с частотой постановки опытов на объекте и дрейфом в противном случае.

ЛЕКЦИЯ 2

Экспериментальная идентификация одномерных детерминированных объектов методом наименьших квадратов

Постановка задачи.

Если для получения модели аналитические методы идентификации неприемлемы в связи с недостаточным знанием алгоритмов функционирования ТО управления, либо по причине сложности и экономической нецелесообразности разработки моделей на их основе, то применяются экспериментальные методы получения модели.

Модели, полученные на основе эксперимента, не столь универсальны, но более просты по своей структуре и позволяют применять однотипный математический аппарат.

Экспериментальные методы идентификации базируются на пассивном, либо активном эксперименте.

В первом случае используются режимы естественной эксплуатации ТО управления, во втором задаются такие, которые наилучшим образом выявляют его свойства.

Во время эксперимента измеряются значения интересующих нас параметров (управляемых выходной переменной) и факторов, на них влияющих (управляющих входной переменной и возмущений). Эти данные позволяют выбрать математическое выражение и определить входящие в него коэффициенты, исходя из обеспечения адекватности модели объекту. Полученная таким образом модель должна с заданной степенью точности соответствовать реальному объекту, т.е. расчетные и экспериментальные значения выходной переменной при заданных управляющих воздействиях и возмущениях должны совпадать в динамических и статических режимах.

Проведение эксперимента и последующая обработка его результатов усложняется в связи с тем, что ТО управления, как правило, многомерное и недетерминированное, поэтому при проведении серий повторяющихся экспериментов при подаче одинаковых входных переменных на выходе можно получить выходные различные значения одной и той же технологической переменной. Такое различие объясняется действием случайных сочетаний, не учтенных факторов. Если разбросы не значительны, то задача сводится к оценке степени приближения модели к результатам эксперимента. При значительных отклонениях под сомнение ставится правильность выбора типа модели.

В ряде случаев возникает даже необходимость сначала установить сам факт наличия закономерности между входными и выходными величинами.

В этом случае решающее значение приобретает задача определения объема эксперимента.

Под объемом эксперимента понимают количество учитываемых факторов, частоту повторения однотипных экспериментов и их количество.

Чем больше число повторений опыта, тем достовернее модель, т.е. тем больше вероятность нахождения истинного значения в более узком интервале эксперимента.

Исходя из вышеизложенного, можно установить следующие этапы получения модели технологического объекта управления по экспериментальным данным:

1. Планирование объема эксперимента – это количество контролируемых параметров, числа измерений и кратности их повторения
2. Выбор типа М.М. (уравнения регрессии).
3. Выполнение эксперимента и обработка данных.
4. Определение количественных характеристик, т.е. коэффициентов принятого типа моделей.

5. Проверка значимости полученных коэффициентов по влиянию на них разброса результатов эксперимента.

6. Проверка адекватности модели объекту.

Если две последние проверки дают отрицательный результат, то проводится уточнение объема эксперимента, т.е. эксперимент повторяется, уточняется модель объекта.

Идентификация одномерных детерминированных объектов.

Задача состоит в представлении в аналитическом виде существующей связи между входными и выходными одномерного объекта. Полагаем, что при эксперименте случайные помехи отсутствуют и, в экспериментальных снятых значениях нет разброса. Для таких объектов модель наиболее часто описывается полиномом вида:

$$Y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (\emptyset)$$

Степень полинома ориентировочно можно определить по разностям экспериментально снятых ординат функций при постоянных приращениях аргумента. Она принимается равной такому порядку разности, при котором она становится примерно постоянной во всем диапазоне изменения входных величин.

Например: при неизменных разностях между ординатами модель описывается полиномом 1-ой степени. При неизменных разностях между разностями 2-го порядка полиномом 2-й степени и т.д.

Оптимальной может считаться модель, у которой при определенных расчётах коэффициентах сумма квадратов отклонений расчетных и экспериментальных значений будет \min , т.е. минимизируется функционал:

$$F(a_i) = \min \sum_1^n (y_s - y_p)^2 \quad (1)$$

Где n - число опытов

Для определения коэффициентов модели составляют систему уравнений типа:

$$\frac{dF(a_i)}{da_i} = 0 \quad (2)$$

Совместное решение уравнений относительно a_i даёт такие их значения, при которых выполняется условие (1).

Для упрощения (3) целесообразно начала отсчёта абсциссы x_i помещать в середину интервала экспериментально снятых значений и пользоваться симметричными значениями x_i (одинаковыми, но различными по значению). В этом случае все суммы нечётных степеней x будут обращаться в нуль, что существенно упростит систему уравнений.

Например: Если в качестве модели выбран полином второй степени:

$$y_p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (3)$$

то функционал (1) имеет вид:

$$F(a_i) = \min \sum_1^n [y_s - (a_0 + a_1x + a_2x^2)]^2$$

Коэффициенты являются неизвестными переменными. В соответствии с (2) составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a_0)}{\partial(a_0)} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_{\varepsilon i} - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) = 0 \\ \frac{\partial F(a_1)}{\partial(a_1)} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_{\varepsilon i} - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial F(a_2)}{\partial(a_2)} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_{\varepsilon i} - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) \cdot x_i^2 = 0 \end{cases}$$

Приравнивая суммы нечётных степеней x_i к нулю, получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \cdot n + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_{\varepsilon i} \\ a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_{\varepsilon i} \cdot x_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_{\varepsilon i} \cdot x_i^2 \end{array} \right.$$

Решение относительно коэффициентов.

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_{\varepsilon i} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 - \sum_{i=1}^n y_{\varepsilon i} \cdot x_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 - (\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \quad (4)$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_{\varepsilon i} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$a_2 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n y_{\varepsilon i} x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_{\varepsilon i} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 - (\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}$$

Рассчитав коэффициенты и подставив их в (Ø) получим уравнение регрессии.

Возможны другие уравнения для моделирования одномерных детерминированных объектов.

Во всех случаях для определения коэффициентов применяется метод минимума суммы квадратов отклонений.

ЛЕКЦИЯ 3

Краткие сведения из теории матриц

Матрицей называется прямоугольная таблица действительных чисел, упорядоченных по строкам и столбцам.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Размер матрицы обозначается как $m \times n$, где m – количество строк, n – количество столбцов. Числа, составляющие матрицу, называют элементами матрицы и обозначаются $a_{i,j}$, где i – номер строки, j – номер столбца, на пересечение которых этот элемент находится.

Матрица размера $1 \times m$ называется вектор-строка, размера $m \times 1$ – вектор столбец, а при $m=n$ – квадратной матрицей порядка m (или n).

Две матрицы A и B одного размера называются равными если равны все их соответствующие элементы $a_{ij} = b_{ij}$.

Матрица A^T размера $n \times m$, строки которой образованы из соответствующих столбцов, а столбцы из строк матрицы A размера $m \times n$, называется **транспонированной** по отношению к матрице A .

$$\text{Пример: } A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad A^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, все элементы которой равны нулю, кроме элементов главной диагонали.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{диагональная матрица.}$$

Единичной матрицей (I) называется диагональная матрица, все элементы которой равны единице.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{единичная матрица.}$$

Суммой двух матриц A и B одинаковых размеров $m \times n$ называется матрица C того же размера, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B :

$$C = A + B, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1 \dots m, j = 1 \dots n)$$

Разностью двух матриц A и B одинаковых размеров называется матрица C того же размера, элементы которой равны разнице соответствующих элементов матриц A и B :

$$C = A - B, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Произведением некоторого числа α на матрицу A размера $m \times n$, называется матрица B того же размера, элементы которой определяются:

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

Произведением двух матриц A и B размером $m \times n$ и $n \times k$, называется матрица C размером $m \times k$, элементы которой равны:

$$c_{ij} = \sum_{q=1}^n a_{iq} b_{qj} \quad i = 1 \dots m, \quad j = 1 \dots k$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 4 & 8 \end{vmatrix} \quad A \times B = \begin{vmatrix} 8 & 16 \\ 12 & 24 \end{vmatrix}$$

$$c_{11} = \sum_{q=1}^1 a_{11} b_{11} = 8 \quad c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} = 12$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} = 16 \quad c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} = 24$$

$$B \times A = 32$$

$$c_{11} = \sum_{q=1}^2 a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12} = 8 + 24 = 32$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \quad C[2 \times 2]$$

$2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 2$

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31}$$

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32}$$

$$c_{21} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31}$$

$$c_{22} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32}$$

Умножение матриц A и B возможно, если число столбцов матрицы A , равно числу строк матрицы B .

Квадратная матрица A^{-1} называется обратной по отношению к матрице A , если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.

$$I \times D = P \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = i_{11} d_{11} + i_{12} d_{21} = d_{11}$$

$$P_{12} = i_{11} d_{12} + i_{12} d_{22} = d_{12}$$

$$P_{21} = i_{21} d_{11} + i_{22} d_{21} = d_{21}$$

$$P_{22} = i_{21} d_{12} + i_{22} d_{22} = d_{22}$$

$$P = D \Rightarrow I \times D = D$$

Таким образом, систему уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}.$$

можно представить в матричном виде:

$$\begin{matrix} & A \cdot X = Y \\ & \begin{matrix} [n \times n] & [n \times 1] & [n \times 1] \end{matrix} \end{matrix}$$

где

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \quad Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}$$

Умножим обе части на образующую матрицу A :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot Y \Rightarrow X = A^{-1} \cdot Y$$

ЛЕКЦИЯ 4

Экспериментальная идентификация многомерных детерминированных объектов

Получение модели многомерных объектов по результатам эксперимента осложняется, прежде всего, тем, что исследуемый параметр влияет много факторов, которые можно разделить на существенные и несущественные. Поэтому трудно определить число входов объекта, подлежащих учёту. В отличие от одномерных объектов затруднена геометрическая интерпретация моделей.

Так, для двух параметров, влияющих на третий, приходится обращаться к двумерной области. Увеличение входов требует рассмотрения многомерной гиперповерхности, описываемой уравнениями с несколькими аргументами и не поддающейся геометрической интерпретации.

Модель, отражающая зависимость исследуемого параметра или критерия от многих переменных должна быть достаточно информативной, достоверной и удобной в пользовании.

При значительном числе x_i модель может быть нелинейной и иметь сложный рельеф с вершинами, впадинами, гребнями. Поиск экстремальных точек вершин и впадин на этой поверхности путём изменения величин составляет содержание оптимального управления. Обычно такая модель называется целевой функцией или поверхностью отклика, а оптимальное управление обеспечивает работу ТО управления в области экстремального значения критерия качества. Получить по данным эксперимента модель объекта управления, точно воспроизводящую поверхность отклика, весьма можно. Поэтому на практике часто ограничиваются её линейным или квадратичным приближением, выбирая диапазон изменения переменной в ограниченной области. Это возможно, если функция непрерывна и выпуклая.

Границы области обычно выбирают так, чтобы в неё попал экстремум и предельно допустимые значения y и x_i .

Такой подход может дать в большей степени качественное, нежели количественное решение. Оно сводится к оценке влияния различных факторов на исследуемую переменную y и даёт возможность пренебречь некоторыми из них.

Метод, позволяющий, получить многомерную модель ОУ на основе эксперимента получил название факторного анализа (метод планирования эксперимента).

Применительно к детерминированному объекту метод заключается в следующем:

1. Выбирают факторы x_i , оказывающие существенное влияние на выход y . Определяют область изменения x_i .
2. Составляют план эксперимента.
3. Принудительно изменяем x_i в выбранных пределах и сочетаниях, определяемых программой эксперимента, фиксируют значение y .
4. Рассчитывают коэффициенты уравнения модели.

Основным условием проведения эксперимента является:

1. Выбор независимых друг от друга входных величин x .
2. Возможность и наблюдаемость изменения y .

При постановке задачи выбирается центр области варьирования с координатами y_0 , x_{10} , x_{20} и т.д. и устанавливаются границы области варьирования. По возможности область выбирается меньшей, что повышает точность моделей. Выбор границ осуществляется с учётом влияния помех так, чтобы последние были, \ll чем планируемое отклонение входных величин $x_{i \max}$ или $x_{i \min}$ от начального значения x_{i0} .

Природа УО такова, что x_i могут иметь различную природу и размерность, поэтому желательно пользоваться относительными величинами входных переменных. В качестве базовых удобно выбирать предельные отклонения Δx_i . В этом случае:

$$\left. \begin{aligned} x_{i \max}^* &= \left(\frac{x_{i \max} - x_{i0}}{\Delta x_i} \right) = 1 \\ x_{i \min}^* &= \left(\frac{x_{i \min} - x_{i0}}{\Delta x_i} \right) = -1 \\ x_{i0}^* &= \left(\frac{x_{i0} - x_{i0}}{\Delta x_i} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При таком подходе ось y помещается в центр идентифицируемой области, для которой $x_{i0} = (x_{i \max} + x_{i \min})/2$

План проведения эксперимента и методика расчета коэффициентов зависят от выбранного типа модели.

В наиболее часто встречающемся виде многомерная модель представляется степенным полиномом, содержащим также члены, учитывающие совместное действие факторов.

Модель, порядок которой не превосходит второго, имеет вид:

$$Y = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{12} x_1 x_2 \quad (6),$$

где x_0 – фиктивная переменная вводимая для унификации членов модели и всегда $= 1$.

После выбора типа модели определяется объем эксперимента. Необходимо установить сколько раз, в какой последовательности и сочетаниях надо изменять x_i , чтобы при минимальном объеме эксперимента получить достаточно верный результат.

При идентификации методом планирования эксперимента принимается следующая последовательность операций:

1. Все члены уравнения моделей, содержащие переменные x_i , их квадраты и произведения записывают в виде линейных уравнений a_i ; x_i и нумеруют последовательно при составлении полинома.

$$y_i = a_0 x_0 + a_1 x_{1j} + a_2 x_{2j} + a_3 x_{3j} + a_4 x_{4j} + a_5 x_{5j}$$

или в общем виде:

$$y_i = \sum_{j=0}^n a_j \cdot x_{ij} \quad (7)$$

где n – число уравнений регрессии; $j = 1 \dots N$ – номер эксперимента.

2. Для определения коэффициента уравнения a_i в соответствии с методом минимума суммы квадратов отклонений, записываем функционал:

$$F = \min \sum_{j=1}^N \left(y_{ji} - \sum_{i=0}^n a_i x_{ij} \right)^2, \text{ где}$$

N – число экспериментов. Берут частные производные этого функционала по коэффициентам и приравнивая их к нулю, получают систему уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, \text{ из которых определяют } a_i.$$

Более просто получить результат, если считать что минимум отклонений имеет место при совпадении результатов расчётной модели и эксперимента в точках поведения опытов, т.е. полагать, что

$$y_{\varepsilon i} = \sum_{i=0}^n a_i x_{ij}$$

В этом случае коэффициенты должны удовлетворять системе линейных уравнений вида (7). В матричной форме эта система имеет вид:

$$Y = X \cdot A \quad (8),$$

Где Y – матрица-столбец экспериментального значения y с числом элементов N , равных числу опытов; A – матрица-столбец коэффициента a_i с числом элементов равных ему членов полинома n ; X – матрица входных воздействий x_i размером $N \times n$.

Чтобы матрицу X сделать квадратной и далее диагональной, необходимо умножить обе части (8) на транспонированную матрицу X^t .

$$\begin{aligned} \text{Обозначим } X^t \cdot X = G \Rightarrow X^t \cdot Y = G \cdot A \\ A = G^{-1} X^t Y \end{aligned} \quad (9)$$

Если выбрать определенную последовательность изменения входов x_i , то квадратная матрица G и обратная ей матрица G^{-1} будут диагональными. Тогда система (9) разбивается на n независимых уравнений, каждое из которых будет включать лишь один неизвестный коэффициент.

$$a_i = \left(\sum_{j=1}^N Y_j \cdot x_{ij} \right) / N \quad (10)$$

j - номер опыта.

Диагональная матрица G^{-1} определяется таким варьированием x , которое подчиняется условиям. Значения входных переменных и последовательность проведения опытов, при которых матрица G^{-1} будет диагональной выбирают из справочников.

Для линейной модели второго порядка план эксперимента будет иметь вид:

X_0	X_1	X_2
+1	-1	-1
+1	+1	-1
+1	-1	+1
+1	+1	+1

Для расчёта коэффициентов получим в соответствии с (10):

$$a_0 = \frac{\sum_1^4 y_i}{4} \quad a_1 = \frac{\sum_1^4 x_{1j} y_i}{4} \quad a_2 = \frac{\sum_1^4 x_{2j} y_i}{4} \quad a_3 = \frac{\sum_1^4 x_{3j} y_i}{4}$$

Эксперимент, при котором перебираются все возможные сочетания x_i полнофакторным – ПФЭ 2^n . Он даёт возможность определить только коэффициенты при входных воздействиях 1-го порядка и их сочетаниях. Такой ПФЭ называют планом 1-го порядка.

Кроме ПФЭ 2^n применяется дробный факторный эксперимент ДФЭ, который позволяет уменьшить объём эксперимента.

Модель в абсолютных единицах после определения коэффициентов запишется в виде:

$$y = a_0 + a_1 \cdot \frac{x_1 - x_{10}}{\Delta x_1} + a_2 \cdot \frac{x_2 - x_{20}}{\Delta x_2} + a_3 \cdot \frac{x_1 - x_{10}}{\Delta x_1} \cdot \frac{x_2 - x_{20}}{\Delta x_2}$$

ЛЕКЦИЯ 5

Планы, применяемые при идентификации многомерных объектов

Ортогональность упрощает вычислительные формулы и дает возможность оценивать коэффициенты математической модели независимо друг от друга. Необходимым и достаточным условием построения ортогональных композиционных планов (ОЦКП) второго порядка является взаимная ортогональность каждой пары вектор-столбцов матрицы базисных функций симметричного ЦКП, представленной в табл.

В этой матрице при произвольной величине осевого плеча α словие ортогонально-

Матрица базисных функций n -мерного симметричного плана (ЦКП) второго порядка

Компонента	g	1	x_1	x_2	...	x_n	$x_1 x_2$...	$x_{n-1} x_n$	x_1^2	x_2^2	...	x_n^2	\tilde{x}_1^2	\tilde{x}_2^2	...	\tilde{x}_n^2
Ядро плана ПФЭ 2^n или ДФЭ 2^{n-p} $N_1 = 2^{n-p}$ $p \geq 0$	1	1	-1	-1	...	-1	+1	...	+1	+1	+1	...	+1	$1 - \lambda_2$	$1 - \lambda_2$...	$1 - \lambda_2$
	2	1	+1	-1	...	-1	-1	...	+1	+1	+1	...	+1	$1 - \lambda_2$	$1 - \lambda_2$...	$1 - \lambda_2$
	3	1	-1	+1	...	-1	-1	...	+1	+1	+1	...	+1	$1 - \lambda_2$	$1 - \lambda_2$...	$1 - \lambda_2$
	4	1	+1	+1	...	-1	+1	...	+1	+1	+1	...	+1	$1 - \lambda_2$	$1 - \lambda_2$...	$1 - \lambda_2$
	N_1	1	+1	+1	...	+1	+1	...	+1	+1	+1	...	+1	$1 - \lambda_2$	$1 - \lambda_2$...	$1 - \lambda_2$
Осевые точки	$N_1 + 1$	1	$-\alpha$	0	...	0	0	...	0	α^2	0	...	0	$\alpha^2 - \lambda_2$	$-\lambda_2$...	$-\lambda_2$
	$N_1 + 2$	1	$+\alpha$	0	...	0	0	...	0	α^2	0	...	0	$\alpha^2 - \lambda_2$	$-\lambda_2$...	$-\lambda_2$
	$N_1 + 3$	1	0	$-\alpha$...	0	0	...	0	0	α^2	...	0	$-\lambda_2$	$\alpha^2 - \lambda_2$...	$-\lambda_2$
	$N_1 + 4$	1	0	$+\alpha$...	0	0	...	0	0	α^2	...	0	$-\lambda_2$	$\alpha^2 - \lambda_2$...	$-\lambda_2$
	$N_1 + 2n$	1	0	0	...	$+\alpha$	0	...	0	0	0	...	α^2	$-\lambda_2$	$-\lambda_2$...	$\alpha^2 - \lambda_2$
Цент- ральные точки	$N_1 + 2n + 1$	1	0	0	...	0	0	...	0	0	0	...	0	$-\lambda_2$	$-\lambda_2$...	$-\lambda_2$
	$N_1 + 2n + 2$	1	0	0	...	0	0	...	0	0	0	...	0	$-\lambda_2$	$-\lambda_2$...	$-\lambda_2$
	$N_1 + 2n + N_0$	1	0	0	...	0	0	...	0	0	0	...	0	$-\lambda_2$	λ_2	...	$-\lambda_2$

сти выполняется для каждой пары вектор-столбцов, содержащей любой фактор x_i или любое взаимодействие факторов. Выполнение условия ортогональности не зависит от числа N_0 центральных точек.

В матрице базисных функций две неортогональности. Во-первых, неортогональность вектор-столбцов базисной функции $f_0(x) = 1$ и каждой из квадратичных функций x_i^2 , во-вторых — квадратичных функций между собой, т.е.

$$\sum_{g=1}^N 1 (x_i^2)_g \neq 0;$$

$$\sum_{g=1}^N (x_i^2)_g (x_j^2)_g \neq 0.$$

Добиться ортогональности можно заменой квадратичных функций x_i^2 центрированными квадратичными функциями

$$\tilde{x}_i^2 = x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{g=1}^N (x_i^2)_g = x_i^2 - \lambda_2, \quad (6.25)$$

$$\lambda_2 = \frac{N_1 + 2\alpha^2}{N} = \frac{N_1 + 2\alpha^2}{N_1 + 2n + N_0}, \quad (6.26)$$

а $N_1 = 2^n - p$ при $p > 0$.

Введение центрированных квадратичных функций (6.25) приводит к преобразованию оценки математической модели

$$\hat{y}(x, b) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} \tilde{x}_i^2 \quad (6.27)$$

к виду

$$\begin{aligned} \hat{y} = (\underline{x}, \underline{b}) &= b_0 + \lambda_2 \sum_{i=1}^n b_{ii} + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n b_{ij} x_i x_j + \\ &+ \sum_{i=1}^n b_{ii} (x_i^2 - \lambda_2) = \bar{b}_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} \tilde{x}_i^2, \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\bar{b}_0 = b_0 + \lambda_2 \sum_{i=1}^n b_{ii}. \quad (6.29)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{V(N_1 + 2n + N_0) N_1 - N_1}{2}}, \quad (6.33) \quad \text{где } N_1 = 2^{n-p} \ (p \geq 0).$$

Изменение значений α в зависимости от n , N_1 и N_0

$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=5$	$n=6$	N_0
$N_1=4$	$N_1=8$	$N_1=16$	$N_1=16$	$N_1=32$	$N_1=32$	
1,000	1,215	1,414	1,547	1,596	1,724	1
1,078	1,287	1,483	1,607	1,662	1,784	2
1,147	1,353	1,547	1,664	1,724	1,841	3
1,210	1,414	1,607	1,719	1,784	1,896	4
1,267	1,471	1,664	1,771	1,841	1,949	5
1,320	1,525	1,719	1,820	1,896	2,000	6
1,368	1,575	1,771	1,868	1,949	2,049	7
1,414	1,623	1,820	1,914	2,000	2,097	8
1,457	1,668	1,868	1,958	2,049	2,143	9
1,497	1,711	1,914	2,000	2,097	2,187	10

На число N_0 центральных точек в ОЦКП не накладывается никаких ограничений, и оно может быть выбрано произвольно. Обычно, желая сократить количество точек спектра ОЦКП, принимают 1.

Вычисление оценок коэффициентов регрессии проводится по простой, общей для любого ортогонального планирования формуле

$$\bar{b}_0 = \frac{\sum_{g=1}^N 1 \bar{y}_g}{\sum_{g=1}^N 1} = \frac{\sum_{g=1}^N \bar{y}_g}{N} = \frac{\sum_{g=1}^N \bar{y}_g}{N_1 + 2n + N_0}; \quad (6.36)$$

$$b_i = \frac{\sum_{g=1}^N (x_i)_g \bar{y}_g}{\sum_{g=1}^N (x_i)_g^2} = \frac{\sum_{g=1}^N (x_i)_g \bar{y}_g}{N_1 + 2\alpha^2}; \quad (6.37)$$

$$b_{ij} = \frac{\sum_{g=1}^N (x_i x_j)_g \bar{y}_g}{\sum_{g=1}^N (x_i x_j)_g^2} = \frac{\sum_{g=1}^N (x_i x_j)_g \bar{y}_g}{N_1}; \quad (6.38)$$

$$b_{ii} = \frac{\sum_{g=1}^N (\tilde{x}_i^2)_g \bar{y}_g}{\sum_{g=1}^N (\tilde{x}_i^2)_g} = \frac{\sum_{g=1}^N (\tilde{x}_i^2)_g \bar{y}_g}{2\alpha^4}. \quad (6.39)$$

Ядро плана	Число факторов					
	2	3	4	5	6	
	ПФЭ 2 ²	ПФЭ 2 ³	ПФЭ 2 ⁴	ДФЭ 2 ⁵⁻¹	ПФЭ 2 ⁶	ДФЭ 2 ⁶⁻¹
N_0	1	1	1	1	1	1
N_1	4	3	16	16	32	32
$2n$	4	6	8	10	10	12
N	9	15	25	27	43	45
α	1,000	1,215	1,414	1,547	1,596	1,724
$k_1(n)$	0,11111	0,06667	0,04000	0,03704	0,02326	0,02222
$k_2(n)$	0,16667	0,09130	0,05000	0,04811	0,02696	0,02635
$k_3(n)$	0,25000	0,12500	0,0625	0,0625	0,03125	0,03125
$k_4(n)$	0,50000	0,22944	0,12500	0,08730	0,07706	0,05660
λ_2	0,66667	0,73016	0,80000	0,76987	0,86266	0,84321
$\Phi(e)$	$9,75 \cdot 10^{-3}$	$1,45 \cdot 10^{-3}$	$2,95 \cdot 10^{-4}$	$2,00 \cdot 10^{-5}$	$6,23 \cdot 10^{-5}$	$7,75 \cdot 10^{-6}$

[illegible]

ЛЕКЦИЯ 6, 7

Особенности эксперимента при идентификации недетерминированных объектов. Некоторые сведения из теории вероятностей.

На практике, на эксперимент оказывает влияние действие многих малозначащих факторов в различных непрогнозируемых сочетаниях, поэтому при повторении опыта с одними и теми же значениями входов получают неповторяющиеся значения выходов.

Разброс выходных величин, его причины и характер могут быть различны. Они могут вызываться систематическими погрешностями, являющимися функцией времени. Разброс может быть вызван пороговым действием, какого – либо неучтенного фактора и при эксперименте давать повторяющуюся зависимость, имеющую характер ломаной линии. Весьма часто на разброс влияют отклонения случайного характера. Для устранения систематических погрешностей применяют многократное повторение номенклатуры опытов при различных сочетаниях значений входов в случайной последовательности.

Случайная последовательность номеров опытов получают, пользуясь таблицами случайных чисел (отбрасывают повторяющиеся числа и значения больше n) или, используя различные алгоритмы, например алгоритм Неймана.

По этому алгоритму для получения случайных чисел в пределах $0...1$ выбирают произвольное число меньше 1, возводят его в квадрат. Берут из середины результата необходимое число разрядов, вновь возводят в квадрат и т.д.

Когда действует порогово-дискретный фактор, применяют сглаживание. Наиболее простой метод сглаживание по способу скользящей средней. Состоит он в вычислении средней ординаты для фиксированных значений абсцисс.

Для приближенного выбора вида моделей результаты эксперимента фиксируют в виде точек в системе прямоугольных координат. При любом действии случайных помех просматривается общий характер зависимости линейная или нелинейная, возрастающая или спадающая. Задавшись видом уравнения регрессии можно получить коэффициент методом наименьших квадратов, и далее оценить адекватность уравнения регрессии и истинной модели объектов. Если разброс столь значителен, что визуально невозможно оценить характер зависимости и предварительно выбрать модель, то приходится увеличивать серии повторяющихся опытов.

При этом чаще повторяются наиболее характерные и вероятные значения, определяющие физическую сущность объекта, что позволяет задаваться тем или иным типом модели. В ряде случаев необходимо установить сам факт зависимости.

Установить статистическую связь между случайными переменными и оценить количественную меру её тесноты позволяет корреляционный анализ. Одним из самых распространенных параметров оценки тесноты статической связи между переменными является корреляционный коэффициент:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M(x))(y_i - M(y))}{n\sigma(x)\sigma(y)} \quad (4)$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 P_i(x)} \quad M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i(x) \quad P_i(x) = \frac{n_{xi}}{n}$$

Аналогично выражение можно записать и для y .

При наличии между случайными переменными величинами линейной связи вида $y = a_0 + a_1x$. Коэффициент корреляции $r=1$

При обратном знаке перед вторым членом $r=-1$

Чем меньше статистическая связь между x и y , тем меньше r . Он принимает значение равное нулю при полной независимости их друг от друга.

Т.к. экспериментальные данные являются случайными величинами, то и рассчитанный по ним коэффициент r также будет величиной случайной, следовательно, его отличие от нуля является лишь предположением и требует подтверждения.

Значение r проверяется путём сравнения величины $H = r\sqrt{n-1}$ с табличными данными, где приведены критические значения $H_{кр}$ для различного числа опытов n и вероятностью P .

При $H > H_{кр}$ предположения о наличии статистической связи между Y и X можно принять с вероятностью P , указанной в таблице.

К случайным факторам можно также отнести ошибки, возникающие при проведении эксперимента. При измерении физических величин существуют четыре основных источника ошибок.

1. Дрейф и шум – невозможность зафиксировать на длительное время состояние объекта.

2. Основной чувствительный элемент неправильно отражает измеряемую величину. *Пример: если спай термопары подвергся коррозии или некачественный, то температура спая будет отличаться от температуры окружающей среды.*

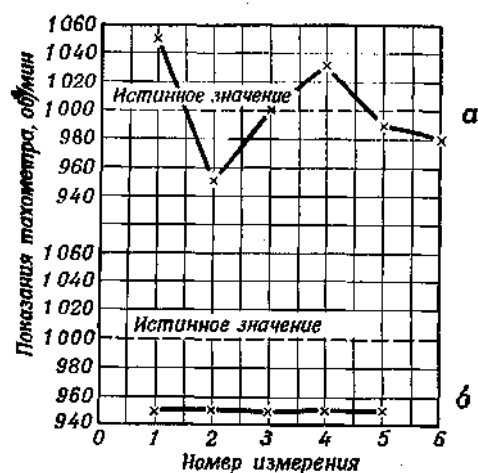
3. Неспособность индикатора или какой-либо промежуточной части прибора правильно отражать реакцию чувствительного элемента. *Пример: потенциометр при подключении термопары может давать неправильное показание напряжения вследствие неправильной стандартизации, калибровки или из-за неправильного функционирования его механических или электрических элементов.*

4. Неспособность наблюдателя правильно регистрировать показания прибора. *Пример: оператор может снять показание не с той шкалы потенциометра.*

При проведении эксперимента эти три источника погрешностей приводят к двум основным классам ошибок: случайные и систематические.

Случайная ошибка имеет место, когда при последовательных измерениях постоянной величины получают различные числовые значения (*рис*). Однако, при числе опытов, стремящихся к бесконечности, среднее значение показаний будет стремиться к измеряемой величине.

Систематическая ошибка наблюдается в тех случаях, когда среднее значение последовательных отсчетов отклоняется от известного точного значения и продолжает отклоняться независимо от числа последовательных отсчетов. Одним из способов уменьшения систематической ошибки является калибровка, которая представляет собой проверку прибора во всем диапазоне измеряемых величин с помощью известного эталона.



Если известно, что существует случайная ошибка, никогда нельзя установить ее абсолютную величину, произведя единственное измерение. Для исследования случайных ошибок, возникающих при проведении эксперимента, необходимо знать закон её распре-

деления. В большинстве случаев можно считать, что случайные ошибки распределены по нормальному закону.

$$y = y_0 e^{-\eta^2 x^2},$$

где y — частота появления некоторого отклонения x относительно точного значения; y_0 — частота появления нулевого отклонения, а η — некоторая постоянная, характеризующая данное нормальное распределение, называемая *модулем* или *показателем точности*.

После некоторых преобразований, формулу представляют в следующем виде:

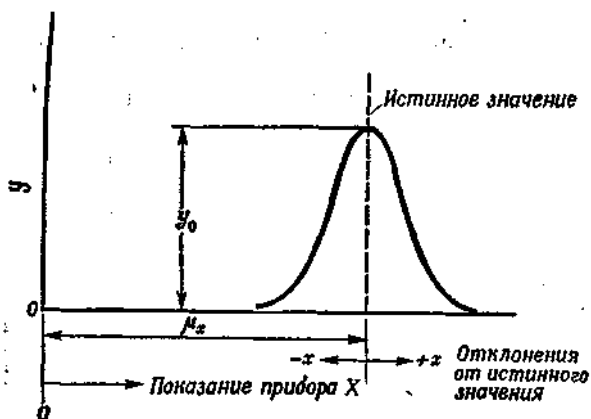
$$y = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2 x^2}.$$

В этом случае y имеет размерность η , а размерность η обратна размерности x .

Вероятность появления отклонения, лежащего в интервале от $-x$ до $+x$, выражается формулой

$$P = \int_{-x}^{+x} \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2 x^2} dx.$$

$$P_{\eta x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\eta x}^{+\eta x} e^{-\eta^2 x^2} d(\eta x),$$



Интеграл вероятности ошибки вычислить трудно и обычно приходится обращаться к таблицам.

ηx	$P_{\eta x}$	ηx	$P_{\eta x}$	ηx	$P_{\eta x}$
0,00	0,000	0,477	0,500(Φ)	0,90	0,797
0,05	0,056	0,50	0,521	0,95	0,821
0,10	0,113	0,55	0,563	1,00	0,843
0,15	0,168	0,60	0,604	1,1	0,880
0,20	0,223	0,65	0,642	1,2	0,910
0,25	0,276	0,70	0,678	1,3	0,934
0,30	0,329	0,707	0,682(σ)	1,4	0,952
0,35	0,379	0,75	0,711	1,5	0,966
0,40	0,428	0,80	0,742	2,0	0,995
0,45	0,476	0,85	0,771	∞	1,000

Пример: Предполагается, что показания тахометра отклоняются относительно 1000 об/мин по нормальному закону и $\eta = 0,04$ (об/мин)⁻¹. Если при этой скорости вращения берется выборка, содержащая 20 отсчетов, то какое число отсчетов будет находиться в интервале от 990 до 1010 об/мин?

Решение: Выданном случае $x = \pm 10$ об/мин, тогда $\eta x = 10 \cdot 0,04 = 0,4$. Из табл. находим, что вероятность нахождения отсчета в этом интервале составляет 0,428. Таким образом, можно ожидать, что из 20 последовательных отсчетов $20 \cdot 0,428$, или 8,56 отсчета будут находиться в интервале от 990 до 1010 об/мин, т. е. практически 8—9 отсчетов. Так как выборка, содержащая 20 отсчетов, невелика, не следует удивляться, если в действительности при каком-либо испытании 6—7 или 10—11 отсчетов окажутся в данном интервале.

Точность измерительной системы удобно выражать некоторым одним числом, или показателем точности, который указывает, с какой точностью прибор может измерять требуемую величину.

1. *Среднее квадратическое отклонение σ* (или *дисперсия σ^2* , равная квадрату среднего квадратического отклонения). Эта величина определяется как квадратный корень из суммы квадратов всех отклонений, деленный на общее число таких отклонений n :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{\infty} x^2}{n}}.$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\eta}$$

и $\eta \cdot \sigma = 0,707$. Вероятность того, что отклонения будут находиться в пределах $\pm \eta \cdot \sigma$ определяется из табл. и составляет 68,2%.

2. *Вероятная ошибка Φ* . Эта величина определяется как такое отклонение, при котором в интервале $\pm \Phi$ находится ровно половина всей совокупности. В случае нормаль-

$$\Phi = \frac{0,477}{\eta}$$

ного распределения и вероятность нахождения отклонений в интервале $\pm \Phi$ составляет 50%. В случае нормального распределения среднее квадратическое отклонение и вероятная ошибка связаны простым соотношением. Зная один из этих показателей или η), можно найти другие показатели.

Пример. В предыдущем примере был рассмотрен тахометр, имеющий $\eta = 0,04$ (об/мин)⁻¹. Найдите два показателя точности данного прибора и число оборотов в минуту, заключенных в интервалах $\pm \sigma$

и $\pm \Phi$. *Решение:* $\sigma = \frac{0,707}{0,04} = 17,7$ об/мин.; $\Phi = \frac{0,477}{0,04} = 11,9$ об/мин. Таким образом, 68,2% всех отсчётов при калиброванном значении 1000 об/мин находится в интервале от 982,3 до 1017,7 об/мин, а половина всех отсчётов заключена между 988,1 и 1011,9 об/мин.

Если на приборе не указана его точность, можно воспользоваться приближенным практическим правилом, которое состоит в следующем: *максимальная ошибка равна половине наименьшего деления на шкале прибора*. Можно ожидать, что только в одном случае из двадцати или даже в одном случае из ста отклонение превысит данное значение.

При выполнении важного эксперимента или ответственного измерения, когда необходима более точная оценка ошибок, следует провести проверку или калибровку прибора. Необходимо получить ответ на следующий важный вопрос: следуют ли отклонения приближенно нормальному или хотя бы симметричному закону распределения? Быстрым и простым способом проверки на нормальность является нанесение отклонений на вероятностную бумагу.

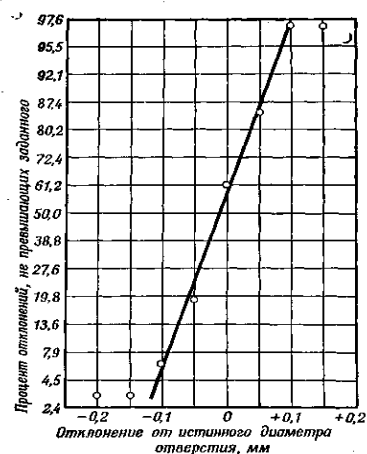
Асимметрия распределения имеет место, когда кривая обладает более крутым наклоном в одну сторону относительно максимума, чем в другую. В случае асимметричного распределения на вероятностной бумаге можно получить почти прямую линию, но она никогда не пройдет через центральную точку ($x=0$, $y=50\%$). В зависимости от того, имеет кривая очень острую или очень пологую вершину, она будет *островершинной* или *плосровершинной*. При этих условиях графики на вероятностной бумаге будут отличаться от прямой (иметь точку перегиба).

До сих пор предполагалось, что известен точный или эталонный отсчет, относительно которого случайным образом разбросаны результаты измерений, полученные с помощью прибора. Однако во многих экспериментах невозможно установить точное значение. В этом случае возникает вопрос: как получить наилучшую оценку отсчета, имея некоторое множество отсчетов? Наиболее вероятное значение измеряемой величины равно среднему арифметическому значению полученных n отсчетов:

Повышение точности, связанное с переходом от вероятной ошибки до почти полного отсутствия ошибки, происходит довольно медленно, так как *ошибка среднего обратно пропорциональна квадратному корню из числа отсчетов*, по которому получено это

$$X_c = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

среднее. При 16 отсчетах точность лишь в два раза выше, чем при четырех, а при 64 отсчетах — лишь в три раза. Если наилучшее значение определяется таким способом, то



целесообразно использовать более точную формулу для нахождения среднего квадратического отклонения:

$$s' = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n-1}}.$$

Температура, °C	925	950	975	1000	1025	1050
Число отсчетов	1	9	6	18	10	2
1000 — X	75	50	25	0	—25	—50
Число отсчетов N	1	9	6	18	10	2
N · (1000 — X)	75	450	150	0	—250	—100
x	75	50	25	0		
x ²	5625	2500	625	0		
N — число значений x ²	1	11	16	18 (n = 46)		
N · x ²	5625	27 500	10 000	0 (Σx ² = 43 125)		

получаем +7,1; следовательно, $X_c = 992,9^\circ\text{C}$. Отсчеты округлены с точностью до 25°C , поэтому для дальнейших вычислений целесообразно принять $X_c = 1000^\circ\text{C}$. Округление производится произвольно в зависимости от навыка оператора, но во многих инженерных задачах оно совершенно уместно, если требуется получить приближенные статистические данные. Теперь найдем s' : $s' = \sqrt{\frac{43\,125}{46-1}} = 31^\circ\text{C}$. С помощью простого соотношения находим, что вероятная ошибка (при нормальном распределении) составляет $\sim 21^\circ\text{C}$. Правильно будет указать, что температура составляет $993 \pm 21^\circ\text{C}$.

При ошибочном допущении о нормальности распределения вероятная ошибка будет примерно лишь на 20% меньше ее точного значения, поэтому допущение о нормальности является удобной аппроксимацией для многих распределений, реально наблюдаемых при выполнении измерений с помощью приборов.

Если установлено коррелирование двух переменных, их теснота и достоверность статистической связи, то необходимо далее получить модель объекта в виде уравнения регрессии требуемой достоверности, полученной в результате регрессивного анализа.

Для получения достоверного уравнения регрессии объекта по данным активного эксперимента необходимо:

1. Убедиться, что разброс значений Y и X допустимы для использования их средних значений для вычисления коэффициентов уравнения регрессии. Если разброс недопустим, то следует повысить точность измерений, либо увеличить объем эксперимента, либо перейти на другой тип моделей.
2. Определить коэффициент уравнения регрессии и численные значения разброса их значений, обусловленных случайным характером измеренных Y и X.
3. оценить значимость каждого коэффициента, сравнив надёжное его значение и разброс.

Если значение коэффициента \ll разброса, то мы вправе полагать, что отличие коэффициента от нуля случайно. Это позволит отбросить незначащие коэффициенты и получить уравнения регрессии в окончательном виде.

Оценить адекватность полученной модели по отклонению средних значений Y, полученных расчётным путём по уравнению моделей от данных эксперимента на реальном объекте. Записать уравнение регрессии в абсолютных единицах.

Пример. Оптический пирометр установлен на светящуюся нить накала, и различными операторами было произведено несколько измерений температуры. Получены результаты, приведённые в таблице. Требуется найти среднее квадратическое отклонение и вероятную ошибку в предположении, что эта выборка взята из нормально распределенной совокупности. Решение. Найдем вначале среднее значение. Проще находить среднее для 1000 — X, а не для X. Сумма членов последней строки равна +325, откуда после деления на 46 (число отсчетов)

ЛЕКЦИЯ 8

Обработка результатов эксперимента при исследовании недетерминированных объектов.

Пример: Вал механизма передаёт момент M и испытывает консольную нагрузку F . Для оценки влияния их значений на выходной сигнал U датчика момента. На рабочем механизме был проведён ПФЭ² с десятикратным повторением каждого опыта. Результаты опыта представлены в таблице:

№	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	$y_{ст}$
1	+1	+1	+1	+1	75	76	68	86	73	75	80	70	69	79	75
2	+1	+1	-1	-1	-29	-30	-28	-20	-27	-27	-19	-29	-19	-23	-25
3	+1	-1	+1	-1	-30	-21	-21	-31	-26	-25	-24	-32	-27	-25	-23
4	+1	-1	-1	+1	-17	-27	-19	-19	-17	-16	-18	-18	-26	-18	-21

В таблице приведены значения U , полученные при статическом нагружении вала для сравнения с усредненными экспериментальными значениями.

Решение:

1. Выбираем абсолютные идентификации, ограниченные реальными эксплуатационными режимами.

$$M_{MAX} = X_{1MAX} = \pm 20 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad |\Delta x_1| = 20 \text{ кНм}; \quad X_{1cp} = 0$$

$$F_{MAX} = Y_{2MAX} = \pm 50 \text{ кН} \quad |\Delta x_1| = 50 \text{ кН}; \quad X_{2cp} = 0$$

$$U_{MAX} = Y_{MAX} = \pm 100 \text{ мВ}$$

2. Анализ погрешности измерений показал, что Y подчиняется нормальному распределению, которое характеризуется математическим ожиданием и дисперсией. В качестве уравнения регрессии из соображений, изложенных, выше принимаем

$$Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1 \cdot x_2$$

3. Оценим, достаточен ли объём эксперимента при имеющем место уравнение помех для получения достоверного регрессии. Для этого проверим однородность дисперсии опыта в различных точках поверхности отклика, т.е. одинаков ли примерно разброс Y во всех 4-х опытах. Определим среднее арифметическое значение Y_{cp} как лучшую оценку математического ожидания:

$$Y_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^k Y_i}{K},$$

где $K = 10$ – число повторов каждого опыта.

Найдём выборочную дисперсию каждого опыта

$$S(y) = \sum_{i=1}^k (Y_i - Y_{cp})^2 / f,$$

где $f = K - 1$ – число степеней свободы или разность между числом повторов каждого опыта и числом независимых констант 1, определенных по данным опытам.

В данном случае для определения $S(Y)$ используется первая константа – Y_{cp} .

Проверка однородности дисперсии по критерию Фишера:

$$F_{расч} = \frac{S_1(Y)}{S_2(Y)},$$

где S_1, S_2 – большая и меньшая дисперсии, при расчётах которых $f_1 = f_2 = 9$.

$F_{расч.}$ Сравнивается с данными таблицами в которых $F_{табл.}$ представляет собой значение критерия Фишера. $F_{табл.}$ находят на пересечении столбца f_1 и строки f_2 .

При $f_1 = f_2 = 9$ $F_{табл.} = 3,2$.

Если $F_{расч.} \leq F_{табл.}$, то в 95 случаях из 100 можно гарантировать однородность дисперсии, а следовательно можно использовать $Y_{ср}$ для расчёта коэффициента регрессии.

При определении $F_{расч}$ для сокращения расчётов достаточно использовать $S_{max}(Y)$ и $S_{min}(Y)$, т.к. в этом случае получим наибольшее значение $F_{расч.}$

Проверка однородности по критерию Кохрена даёт более надёжные результаты, особенно при большом числе опытов.

В этом случае определяется:

$$G_{расч} = \frac{S_{MAX}(Y)}{\sum_{i=1}^N S_i(Y)},$$

где $S_{MAX}(Y)$ – максимальная дисперсия; $S_i(Y)$ – дисперсия каждого опыта при данном сочетании x_1 и x_2 ; $N = 4$ – число опытов. В таблице приведены результаты расчётов $Y_{ср}$ и $S(Y)$ для каждой из серии опытов.

N	$Y_{ср}$	$S(Y)$
1	75,1	30,8
2	-24,8	17,7
3	-26,2	14,9
4	-19,5	14,5

По полученным значениям $S(Y)$ выполнен расчёт $G_{расч.}$

$$G_{расч} = \frac{S_1(Y)}{\sum_{i=1}^N S_i(Y)} = 0,39$$

Т.к. $G_{расч.} \leq G_{табл.}$, то дисперсии однородны и среднее значение Y и X можно использовать для определения коэффициента a_i .

На этом основании можно сделать вывод о достаточном объёме эксперимента и правильном выборе типа модели.

4. Определение коэффициента уравнения регрессии:

$$a_i = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ij} y_{ij}}{N}$$

$$a_0=1,15 \quad a_1=24 \quad a_2=23,3 \quad a_3=26,6$$

5. Оценим значимость коэффициента уравнения регрессии. При ПФЭ дисперсия коэффициент определяется по выражению:

$$S(a) = S_b(Y) / N,$$

где $S_b(Y)$ – дисперсия воспроизводимости опыта.

$$S_b(Y) = \frac{\sum_{i=1}^n S_i(Y)}{N(m)} = 19.55$$

$$\text{тогда } S(a) = \frac{19.55}{4} = 4.9$$

По этому значению можно найти доверительный интервал, в котором находятся истинные значения коэффициентов уравнения регрессии с достоверностью P :

$$(a_3 - \Delta a) < a_{\text{ист}} < (a_3 + \Delta a)$$

$$\Delta a = t \cdot \sqrt{S(a)},$$

где t – табличное значение критерия Стьюдента.

Значение t вычисляется по числу степеней свободы

$$f_{cm} = (k - L) \cdot N = 36 \quad t_{\text{табл}} = 1.96$$

$$\Delta a = 1.95 \sqrt{4.9} = 4.33$$

Коэффициент считается значимым, если $|a| > |\Delta a|$, тогда в рассматриваемом примере коэффициент a_0 считается незначимым $a_0 = 0$ и с учетом этого модель с достоверностью равной $P = 0.95$ имеет вид:

$$y = 24x + 23.3x_2 + 26.6x_1x_2$$

5. Оценим адекватность модели объекту. Для этого по предыдущему выражению определим $Y_{\text{расч.}}$ в каждом из четырех факторных экспериментах.

$$Y_{1\text{расч.}} = 73.9 \quad Y_{3\text{расч.}} = -27.3$$

$$Y_{2\text{расч.}} = -25.9 \quad Y_{4\text{расч.}} = -20.7$$

Дисперсия адекватности, т.е. отклонения эксперимента и расчетные значения рассчитываются по выражению:

$$S_{ad}(y) = K \sum_{i=1}^N (Y_{\text{эсп}} - Y_{\text{расч}})^2 / f_{ad}, \text{ где}$$

$$f_{ad} = N - l_a, \text{ где}$$

l_a – число коэффициентов уравнения регрессии.

$$l_a = 3$$

$$f_{ad} = 4 - 3 = 1$$

$$Y_{\text{эсп.}} = Y_{\text{ср.}}$$

$$S_{ad}(y) = 53.1$$

Модель может оказаться неадекватной объекту из-за ошибок при определении коэффициента, неверно выбранного типа моделей m из-за неверной оценки значимости коэффициента.

Чтобы исключить влияние на оценку адекватности случайного разброса Y , т.е. оценить адекватность только по типу моделей следует сравнить по критерию Фишера дисперсию $S_{ad}(Y)$, отражающую суммарный эффект и $S_b(Y)$, отражающую влияние помех.

$$F_{ad\text{расч}} = S_{ad}(Y) / S_b(Y) = \frac{53.1}{19.55} = 2.7$$

По таблице для $f_1 = f_{ad} = 1$ и $f_2 = f_{ст.} = 36$

$$F_{\text{таб}} = 3.5 > F_{ad\text{расч}} = 2.7$$

Следовательно, принятая модель с достоверностью 95% адекватна датчику момента.

ЛЕКЦИЯ 9, 10

Динамическая идентификация

Многие технологические объекты управления, функционирования которых в динамике ещё не достаточно изучено, не могут быть описаны аналогично. Для получения их динамической модели также применяются экспериментальные методы. Целью последних является нахождение аналитических выражений, описывающих динамику объекта управления с требуемой степенью точности.

В отличие от статических моделей, динамические связывают выходную величину с входным воздействием в процессе их изменения во времени.

Как правило, ТО управления являются системами, элементы которых имеют нелинейный характер и описываются уравнением высоких порядков.

Применение методов математического моделирования избавляет от решения дифференциальных уравнений, но при этом необходимо иметь аналитические модели всех звеньев.

Применение методов математического моделирования позволяет получить формальную модель практически любого объекта по результатам обработки экспериментальных данных.

Существуют активный и пассивный эксперименты. Активный основан на задании объекту специально сформулированных управляющих или возмущающих воздействий.

По реакции объекта на эти воздействия устанавливаются и оцениваются его динамические свойства. Обычно изучается реакция на скачкообразные, гармонические или импульсные воздействия.

Полученные переходные или частотные характеристики позволяют определить, например, для линейной системы – передаточные коэффициенты, постоянные времени отдельных звеньев и динамические свойства объекта в целом.

Не для всех систем может быть поставлен активный эксперимент. Иногда он может быть неприменим из-за дороговизны спецоборудования, высокой стоимости его монтажа. Нередко его реализация невозможна по условиям техники безопасности.

В этом случае применяется пассивный эксперимент. Сущность его заключается в фиксации входных и выходных переменных в нормальных эксплуатационных режимах.

Одним из несложных современных методов динамической идентификации, основанных, на результатах пассивного эксперимента является метод Калмана.

Сущность его заключается в следующем:

1. В процессе эксплуатации через строго фиксированные интервалы времени записываются значения входных и выходных параметров.
2. Выбирают наиболее простой вид аналитической модели, описанный в виде разностного уравнения этого или иного вида.
3. по результатам эксперимента и принятого вида модели методом минимума суммы квадратов отклонений определяют коэффициент разностного уравнения.
4. Решают разностное уравнение и сравнивают полученные динамические характеристики с экспериментальными.
5. при больших отклонениях задаются разностным уравнением более высокого порядка и повторяют расчет.

Сопоставление изложенной методики динамической идентификации с порядком выполнения статической идентификации свидетельствует об аналогии. Отличие состоит лишь в моделях. Модель в статике описывается алгебраическим уравнением, а динамическая модель разностным.

Для дифференциального линейного уравнения k-того порядка аналогом будет разностное уравнение вида:

$$Y_n = A_0 \cdot Y_{n-1} + A_1 Y_{n-2} + \dots + A_{k-1} Y_{n-k} + B_0 X_{n-1} + B_1 X_{n-2} + \dots + B_{k-1} X_{n-k}, \text{ где}$$

n – номер точек эксперимента, A, B – коэффициенты разностного уравнения.

Это уравнение может быть принято в качестве исходной модели при динамической идентификации.

Поскольку порядок идентифицируемого объекта обычно неизвестен, следует начинать с наиболее простой модели, а именно разностного уравнения 2-го порядка и т.д.

Используя методику минимизации суммы квадратов отклонений, т.е. функционал вида:

$$F = \min \sum_{i=1}^n (Y_{\varepsilon i} - Y_{pi})^2$$

Получим систему уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial A_0} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial A_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial B_0} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial B_1} = 0;$$

Методом наименьших квадратов находим значения коэффициентов.

Для идентификации динамических объектов с помощью активного эксперимента применяют также сигнал Дирака или $\delta(t)$ – дельта тестирующий сигнал (рис.4.14).

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = \tau, \Delta\tau \rightarrow 0 \\ 0, & t \neq \tau \end{cases}$$

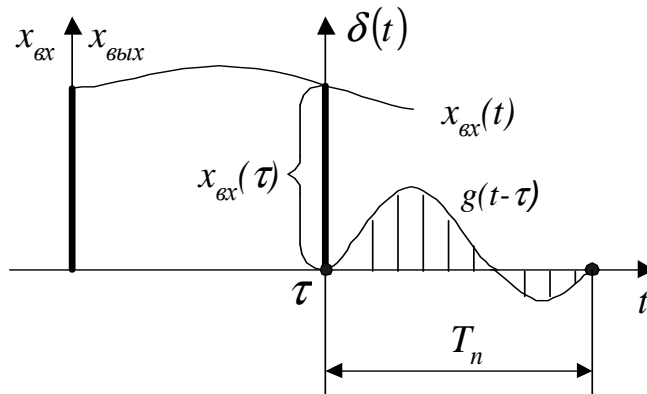


Рис. 4.14. Тестирующий сигнал Дирака ($\delta(t)$ – дельта сигнал)

Подача $\delta(t)$ на входе динамической системы дает реакцию системы в виде так называемой **весовой функции** $g(t - \tau)$. Причем длительность переходного процесса T_n .

Задача построения D – оптимального тестирующего сигнала для линейных по параметрам динамических объектов сводится к следующему:

- 1) находят D – оптимальный план для соответствующей регрессионной модели;
- 2) на основе полученного плана строят оптимальный тестирующий сигнал.

Предположим, что объект является линейным или допускает линеаризацию в пределах малых отклонений от некоторого статистического состояния. Пусть выход $\tilde{y}(t)$ измеряется дискретно с некоторым шагом Δt , а вектор шума $e^T = (e[0], e[\Delta t], e[2\Delta t], \dots, e[n\Delta t])$. Входной сигнал $x(t)$ является кусочно-постоянной на интервале Δt функцией, тождественно равной нулю при отрицательном времени (до начала эксперимента).

В качестве модели линейного динамического объекта может быть принята регрессионная модель, описывающая поведение объекта в отклонениях от некоторого статического состояния, :

$$Y[n\Delta t] = \sum_{m=0}^{l-1} g[m\Delta \tau] \Delta \tau \cdot x[n\Delta t - (m+1)\Delta \tau] + e[n\Delta t], \quad (4.69)$$

где $g[m\Delta \tau]$ – дискретная весовая функция (набор ординат); $x[n\Delta t - (m+1)\Delta \tau]$ – дискретное значение отклонения входного сигнала от их значений в исходном статическом состоянии; $Y[n\Delta t]$ – дискретное значение отклонения выходного сигнала; $e[n\Delta t]$ – случайная помеха; $l\Delta \tau = T_n = x[n\Delta t - (m+1)\Delta \tau]$ – априорная оценка времени переходного процесса объекта.

Выражение (4.69) показывает, что единственным сигналом, которым можно варьировать в процессе эксперимента, являются дискретные значения входного сигнала. Эти сигналы и берутся в качестве факторов планирования эксперимента.

Таким образом, при $\Delta \tau = \Delta t$ факторами планирования будут

$$x[(n-i)\Delta t], i = 1, 2, \dots, l \quad (4.70)$$

Тогда, при условии, что $x(t) \equiv 0$ при $t < t_0$, пространство планирования X_0 будет ограничено системой неравенств

$$-1 \leq x[(n-i)\Delta t] \leq 1 \quad (4.71)$$

Далее, известно, что для моделей типа (4.69) ортогональные планы, построенные с помощью ПФЭ или ДФЭ, являются одновременно и D –оптимальными. Поэтому для получения оптимального тестирующего сигнала проще использовать ПФЭ или ДФЭ. При этом следует иметь в виду, что в выражении (4.69) отсутствует свободный член. И эта особенность позволяет разбить матрицу ПФЭ на две, каждая из которых является D –оптимальным планом для данной модели. Разбиение матрицы на две делают с учетом того, что в каждой из полученных матриц один из факторов должен быть зафиксирован на одном из уровней $+1$ или -1 .

Учитывая, что всего факторов l , то существует l симметричных пар эквивалентных D –оптимальных планов для модели (4.69), полученных на основе плана ПФЭ типа 2^l . Есть возможность найти и другие D –оптимальные планы.

Покажем *правило нахождения всех возможных D –оптимальных планов* для модели (4.69), матрицы которых имеют 2^{l-1} строк. Берется матрица ПФЭ 2^l . Строки этой матрицы формируются по две в каждой из $N = 2^{l-1}$ групп. В каждую группу включаются только симметричные строки матрицы ПФЭ. Затем все возможные D –оптимальные планы получаются путем включения одной из строк каждой группы в матрицу плана. Тогда общее количество возможных D –оптимальных планов для модели (4.69), полученных на основе ПФЭ типа 2^l будет равно 2^N .

Пример. Пусть необходимо найти четыре ординаты весовой функции, т.е. $l = 4$. Тогда ПФЭ будет иметь план $2^l = 2^4 = 16$ (табл. 4.13).

Таблица 4.13

Номер опыта табл.4.13	$x[(n-1)\Delta]$	$x[(n-2)\Delta]$	$x[(n-3)\Delta]$	$x[(n-4)\Delta]$
1	-1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1	-1
3	-1	+1	-1	-1
4	+1	+1	-1	-1
5	-1	-1	+1	-1
6	+1	-1	+1	-1
7	-1	+1	+1	-1
8	+1	+1	+1	-1
9	-1	-1	-1	+1

10	+1	-1	-1	+1
11	-1	+1	-1	+1
12	+1	+1	-1	+1
13	-1	-1	+1	+1
14	+1	-1	+1	+1
15	-1	+1	+1	+1
16	+1	+1	+1	+1

Перестраиваем матрицу 2^4 , так чтобы в каждую группу были включены симметричные строки (табл. 4.14). D -оптимальные планы $2^{l-1} = 2^3 = 8$ получаются путем включения восьми строк, взятых по одной из каждой группы. Общее количество D -оптимальных планов будет равно $2^N = 2^8 = 256$, т.к. количество групп $N = 2^{4-1} = 8$.

Таблица 4.14

Номер опыта табл.4.14	Номер группы	$x[(n-1)\Delta]$	$x[(n-2)\Delta]$	$x[(n-3)\Delta]$	$x[(n-4)\Delta]$	Номер опыта табл.4.13
1	3	-1	-1	-1	-1	1
2		+1	+1	+1	+1	16
3	2	+1	-1	-1	-1	2
4		-1	+1	+1	+1	15
5	7	-1	+1	-1	-1	3
6		+1	-1	+1	+1	14
7	1	+1	+1	-1	-1	4
8		-1	-1	+1	+1	13
9	5	-1	-1	+1	-1	5
10		+1	+1	-1	+1	12
11	6	+1	-1	+1	-1	6
12		-1	+1	-1	+1	11
13	8	-1	+1	+1	-1	7
14		+1	-1	-1	+1	10
15	4	-1	-1	-1	+1	9
16		+1	+1	+1	-1	8

Теперь возникает задача построения самого D -оптимального тестирующего сигнала. Для этого существуют два пути.

Первый, наиболее простой, состоит в стыковке строк матрицы D -оптимального плана. Полученный таким путем тестирующий сигнал имеет максимальную длину, причем измерение выходной величины начинается через l - тактов, начиная с $(l+1)$.

Второй путь состоит в "сшивании" строк на γ тактов. Очевидно, что минимальная длина тестирующего сигнала достигается в том случае, если все строки матрицы "сшиваются" на $\gamma = (l-1)$ тактов. В этом случае измерение выходной величины осуществляется на каждом такте, начиная с $(l+1)$. Такое "сшивание" можно считать корректным, если получающийся при этом план является D -оптимальным. Для нашего случая полученный путем "сшивания" план должен быть представлен одним из 256 планов.

Используем метод "сшивания" для получения D -оптимального плана $2^{l-1} = 2^{4-1}$ на основе матрицы таблицы 4.14.

На основе таблицы 4.15 получили минимальной длины D -оптимальный тестирующий сигнал $+1+1-1-1 \ -1-1+1-1 \ +1+1-1$.

Таблица 4.15

Номер опыта табл.4.1 5	$x[(n-4)\Delta]$	$x[(n-3)\Delta]$	$x[(n-2)\Delta]$	$x[(n-1)\Delta]$	Номер опыта табл.4.1 4	Номер группы
1	<u>+1</u>	<u>+1</u>	<u>-1</u>	<u>-1</u>	8	1
2	+1	-1	-1	-1	15	4
3	-1	-1	-1	-1	1	3
4	-1	-1	-1	+1	3	2
5	-1	-1	+1	-1	5	7
6	-1	+1	-1	+1	11	6
7	+1	-1	+1	+1	10	5
8	-1	+1	+1	-1	13	8

В таблице 4.16 также представлен D -оптимальный план для нахождения четырех ординат весовой функции, однако длина тестирующего сигнала будет уже не оптимальной $+1+1-1-1 +1-1-1-1 -1+1-1+1$.

Таблица 4.16

Номер опыта табл.4.1 6	$x[(n-4)\Delta]$	$x[(n-3)\Delta]$	$x[(n-2)\Delta]$	$x[(n-1)\Delta]$	Номер опыта табл.4.1 5	Номер группы
1	<u>+1</u>	<u>+1</u>	<u>-1</u>	<u>-1</u>	8	1
2	+1	-1	-1	+1	14	8
3	-1	-1	+1	-1	5	7
4	-1	+1	-1	-1	9	5
5	+1	-1	-1	-1	15	4
6	-1	-1	-1	-1	1	3
7	-1	-1	-1	+1	3	2
8	-1	+1	-1	+1	11	6

На рисунке 4.15 а, б) представлены сами тестирующие сигналы полученные соответственно по таблицам 4.15, 4.16.

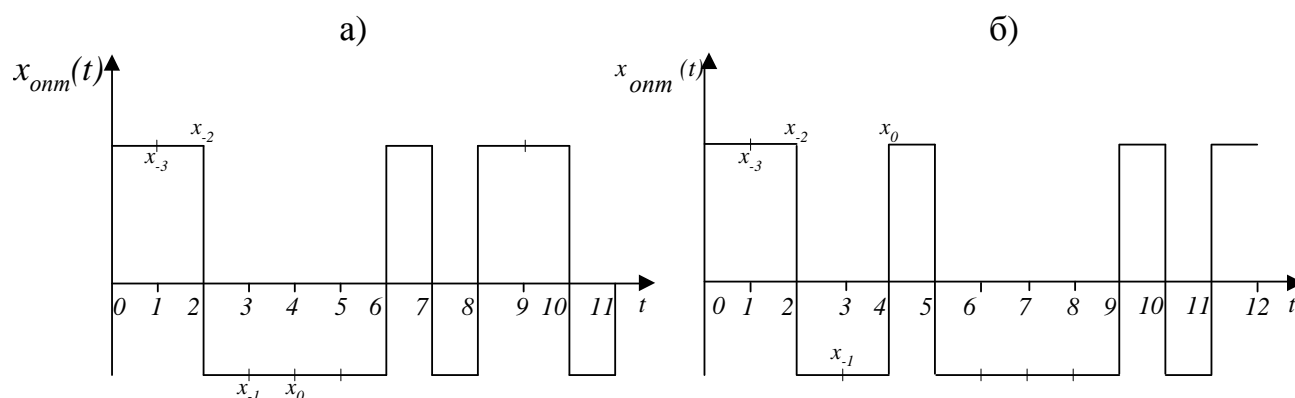


Рис. 4.15. Оптимальный тестирующий сигнал

С учетом полученного оптимального тестирующего сигнала, модель линейного динамического объекта для каждого опыта примет следующий вид:

$$Y[\Delta t] = g_0 x_0 + g_1 x_{-1} + g_2 x_{-3} + g_2 x_{-3};$$

$$Y[2\Delta t] = g_0 x_1 + g_1 x_0 + g_2 x_{-1} + g_2 x_{-2};$$

$$\begin{aligned}
Y[3\Delta t] &= g_0x_2 + g_1x_1 + g_2x_0 + g_2x_{-1}; \\
Y[4\Delta t] &= g_0x_3 + g_1x_2 + g_2x_1 + g_2x_0; \\
Y[5\Delta t] &= g_0x_4 + g_1x_3 + g_2x_2 + g_2x_1; \\
Y[6\Delta t] &= g_0x_5 + g_1x_4 + g_2x_3 + g_2x_2; \\
Y[7\Delta t] &= g_0x_6 + g_1x_5 + g_2x_4 + g_2x_3; \\
Y[8\Delta t] &= g_0x_7 + g_1x_6 + g_2x_5 + g_2x_4; \\
Y[9\Delta t] &= g_0x_8 + g_1x_7 + g_2x_6 + g_2x_5.
\end{aligned}$$

Так как оптимальный тестирующий сигнал, построенный на основе таблицы 4.16, длиннее на один такт, то и реакция системы будет получено на одну больше – не восемь, как для оптимального сигнала по таблице 4.15, а девять.

ЛЕКЦИЯ 11

Оптимизация технологических объектов.

Обычно конечной целью всякого экспериментального исследования является достижение и поддержание экстремальных показателей процесса (например, при создании различных машин, приборов и механизмов).

Задача оптимизации сводится к отысканию таких значений управляемых факторов $X_1 = X^{\circ}_1, X_2 = X^{\circ}_2, \dots, X_n = X^{\circ}_n$ объекта исследования, при которых его отклик y (критерий оптимизации, целевая функция) достигает своего экстремального значения $y_{\text{опт}} = y(X, X^{\circ}_2, \dots, X^{\circ}_n)$ — максимума или минимума. Оптимальным будем считать максимальное значение отклика $y_{\text{опт}}(X) = y_{\text{max}}(X)$. К такой форме при необходимости всегда можно привести и задачу минимизации, если вместо наименьшего значения $+y$ искать наибольшее значение $-y$.

В тех случаях, когда функция отклика $y(X)$ известна, координаты точки оптимума $X_0 = \|X_1, X_2, \dots, X_n\|$ можно найти с помощью известных аналитических методов оптимизации: дифференциального или вариационного исчисления, линейного программирования и т.д.

Однако в большинстве практических случаев аналитическая зависимость $y(X)$ неизвестна, и единственное, чем располагает исследователь, — это возможность измерения значений отклика при различных комбинациях величин варьируемых факторов X_1, X_2, \dots, X_n . В таких случаях для решения задачи оптимизации пользуются экспериментальными методами, которые подразделяются на две группы:

1) поисковые методы, в которых осуществляется экспериментальный поиск точки оптимума X_0 с точностью до величины принятого рабочего шага по каждому фактору;

2) методы, основанные на предварительном экспериментальном получении математической модели объекта исследования, которая описывает его поведение в области оптимума, и предусматривающие изучение общих свойств поверхности отклика в определенной области факторного пространства, где предположительно находится оптимум. Для описания области оптимума можно использовать, например, математическую модель вида (1.6). Координаты точки оптимума X_0 в этом случае можно определить с помощью известных теоретических методов: дифференциального исчисления, линейного или целочисленного программирования и т. п.

Существует большое число разнообразных поисковых методов. Однако из-за наличия помех (неконтролируемых факторов) при экспериментировании на реальных объектах (например, при исследовании сельскохозяйственных процессов — это шум случайного характера, детерминированный дрейф) использовать практически можно лишь сравнительно ограниченный набор методов поиска.

В поисковых методах осуществляется последовательное локальное изучение поверхности отклика по результатам ряда экспериментов, специально спланированных вблизи выбранной точки. Стратегия поискового метода предусматривает:

— определение направления движения из некоторой выбранной точки; это направление зависит от локальных свойств поверхности отклика вблизи от выбранной точки и определяется таким образом, чтобы продвижение в выбранном направлении приводило к значению функции отклика, более близкому к оптимальному по сравнению со значением в исходной точке;

— организацию движения в найденном направлении;

На первом этапе все факторы, кроме первого, фиксируются на уровнях $X_2 = X_{2i0}$, $X_3 = X_{30}$, ..., $X_n = X_{n0}$ (на рис. 5.1 фактор X_2 зафиксирован на уровне X_{20}), а фактор X_1 варьируется на пробный шаг варьирования ΔX_1 в обе стороны от начальной точки УИ., (на рис. 5.1 — точки M_0 , M_1) для выяснения направления движения. На рис. 5.1 представлен случай, когда отыскивается максимум, поэтому при небольшом уровне шума на выходе объекта значение отклика в точке M_1 окажется большим, чем в точке M_0 . В такой ситуации двигаться следует в направлении $\vec{OM_1}$. Тогда из начальной точки M_0 двигаемся рабочими шагами ΔX_1 ($\Delta X_1 > 0$), $L_0 M_1 = L_1 M_2 = M_2 M_3 = \Delta X_1$) до достижения частного экстремума (точка M_3 на рис. 5.1) по первому фактору.

На втором этапе точка первого частного экстремума принимается за новую начальную точку (на рис. 5.1 точка M_3 с координатами $X_1 = X_{13}$, $X_2 = X_{20}$). Все факторы, кроме X_1 , фиксируются на постоянных уровнях. Снова осуществляется пробное движение (точки M_3 , M_4 ; $M_3 M_4 = \Delta X_2$ на рис. 5.1) для выяснения направления движения, а затем рабочее движение ($M_3 M_4 = \Delta X_2$; рис. 5.1) до достижения наибольшего значения отклика в направлении X_2 (точка M_4 на рис. 5.1). Эту точку принимаем за начальную точку для третьего этапа и т. д.

На n -м этапе (n — число факторов) варьируется X_n при фиксированных уровнях остальных факторов X_{i0} ($i=1... n-1$), совершается пробное и рабочее движение до достижения частного экстремума по n -му фактору. Если абсолютный экстремум не достигнут, то проводят новый цикл опытов — и так до достижения такой точки, движение из которой в направлении любого фактора приведет к снижению значения отклика. Достижение этой точки служит критерием для прекращения поиска экстремума, и эта точка принимается в качестве оценки точки абсолютного экстремума с точностью до величины принятого рабочего шага по каждому фактору.

На рис. 5.1 точка M_7 принимается за точку абсолютного экстремума, а пространство внутри прямоугольника $ABCM_5$ представляет собой область оптимума.

По методу Гаусса — Зайделя выбранные пробные и рабочие шаги по каждому фактору на всех этапах поиска экстремума остаются постоянными. Основное достоинство данного метода — наглядность и простота стратегии, а также довольно высокая помехозащищенность. К недостаткам этого метода относятся: а) его неэффективность, так как для того чтобы точнее определить точку абсолютного экстремума, необходимо уменьшить рабочие шаги по каждому фактору, а это приводит к значительному увеличению числа опытов, особенно при большом количестве управляемых существенных факторов; б) иногда в полевых условиях трудно зафиксировать на длительное время все управляемые факторы, кроме одного, что вызывает дополнительные погрешности в нахождении частных экстремумов; в) в том случае, когда поверхность отклика имеет сложную форму, метод Гаусса — Зайделя может дать ложный ответ на расположение точки абсолютного экстремума. Если, например, экспериментатор попал в точку L_0 (рис. 5.1), то она будет принята ошибочно за оценку точки абсолютного экстремума, так как при движении в направлениях X_1 и X_2 из точки L_0 значения отклика уменьшаются.

ЛЕКЦИЯ 12

Симплексный метод экспериментальной оптимизации

Будем называть n -мерным симплексом многогранник, образованный в n -мерном пространстве $(n+1)$ -ми вершинами, не принадлежащими одновременно ни одному подпространству меньшей размерности. На плоскости ($n = 2$) симплексом является треугольник, в трехмерном пространстве ($n = 3$) — тетраэдр и т.д. Симплекс называется правильным (регулярным), если для него расстояние ρ между двумя любыми вершинами есть величина постоянная (в пространстве нормированных факторов). Условие правильности симплекса может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned}(\underline{x}_g - \underline{x}_f) (\underline{x}_g - \underline{x}_f) &= \rho^2 = \text{const}; \\ g &\neq f; f, g = 1 \dots (n+1).\end{aligned}$$

Переход от размерных величин факторов к нормированным осуществляется с помощью нормирующего преобразования.

Для симплексного метода предлагается простая непараметрическая процедура «грубого» описания поверхности отклика, заключающаяся в представлении локального участка поверхности по относительным значениям отклика в факторном пространстве вблизи точки рабочего режима. Сравнивая значения отклика в этих точках, можно среди них выбрать наихудшую и наилучшую точки (в которых значения отклика соответственно наименьшее и наибольшее при поиске максимума функции отклика и наоборот — при поиске ее минимума) и, таким образом, приблизительно определить предпочтительное направление желательного смещения рабочей точки к оптимуму. После реализации выбранного смещения в окрестности нового рабочего режима вся процедура вновь повторяется — и так продолжается до достижения области оптимума.

Если теперь провести опыты в $n+1$ вершинах n -мерного правильного симплекса и сравнить полученные в них значения отклика, можно выделить наихудшую вершину и ей противолежащую $(n-1)$ -мерную грань, образованную остальными вершинами. Если далее найти так называемую зеркальную точку, симметричную наихудшей вершине относительно центра указанной грани, то эти зеркальная точка и грань образуют новый симплекс прежней размерности, но центр его будет смещен в сторону экстремума функции целевого отклика на один шаг. Многократное повторение таких шагов, предусмотренное симплексным методом, позволит достичь области экстремума, а также отслеживать его дрейф. Преимущество этого метода состоит в том, что переход к новому симплексу каждый раз осуществляется отбрасыванием одной старой вершины и построением независимо от размерности симплекса только одной новой. Таким образом, на каждом шаге требуется независимо от числа факторов оптимизации реализовать условия только одного опыта.

На рис. линиями постоянного уровня на нормированной факторной плоскости изображена одноэкстремальная поверхность отклика, нанесены факторные границы (x_{imin}, x_{imax} для $i = 1, 2$) и штриховкой отмечена область недопустимых значений факторов.

Правило 1. Все опыты нужно проводить согласно условиям, отвечающим вершинам правильных n -мерных симплексов.

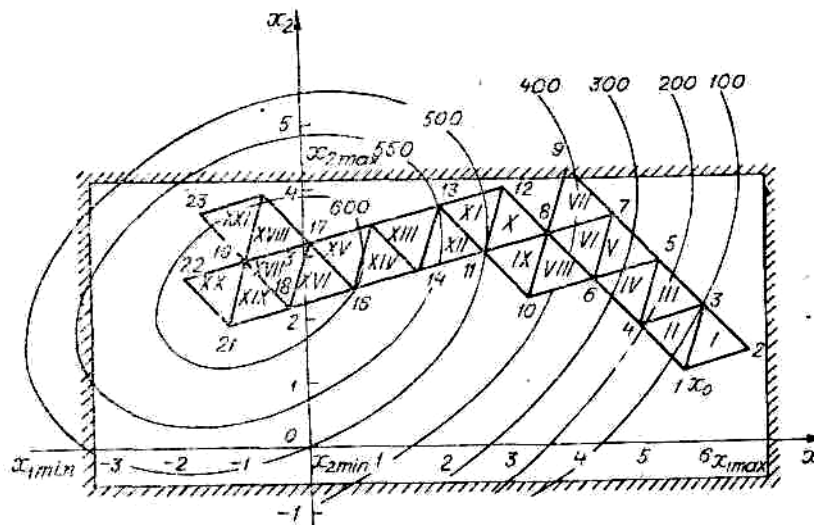
Начальная точка x_0 поиска обычно соответствует установленному технологическому регламенту или наилучшему из известных режиму ведения процесса. Эта точка может быть принята за вершину начального симметричного симплекс-плана. Одну из вершин s^0_1 помещают в начальную точку X_0 , а положение остальных вершин определяют с помощью векторов:

$$\begin{aligned}c_2^0 &= \underline{X}_0 + \rho(p\Delta X_1, q\Delta X_2, \dots, q\Delta X_n); \\c_3^0 &= \underline{X}_0 + \rho(q\Delta X_1, p\Delta X_2, \dots, q\Delta X_n); \\&\vdots \\c_{n+1}^0 &= \underline{X}_0 + \rho(q\Delta X_1, q\Delta X_2, \dots, p\Delta X_n),\end{aligned}$$

ρ — размер симплекса (величина безразмерная); шаги варьирования ΔX ($i = 1 \dots n$) по каждому фактору выбираются на основании априорной информации; n — число факторов.

$$p = \frac{1}{n\sqrt{2}}(n-1 + \sqrt{n+1}), \quad q = \frac{1}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} - 1);$$

На рис. в соответствии с вышеприведенными рекомендациями построен начальный правильный симплекс 1 с единичной стороной, одной из вершин которого является начальная точка. Координаты вершин симплекса определяют условия проведения опытов на объекте. В примере о значениях отклика в различных вершинах можно судить по их близости к тем или иным линиям постоянного уровня отклика (значения этих уровней указаны на рисунке).



Правило 2. Движение к экстремуму поверхности целевого отклика на каждом шаге должно осуществляться посредством перехода от рассматриваемого (реализуемого) симплекса к новому. При этом в рассматриваемом симплексе надо отбросить наихудшую вершину и построить точку, симметричную (зеркальную) к ней относительно центра $(n-1)$ -мерной оставшейся грани симплекса, а из оставшейся грани и зеркальной точки образовать новый симплекс.

Каждую i -ю размерную координату зеркальной точки $X_{(n+h)}$ h -го симплекса легко вычислить по формуле

$$\underline{X}_{n+h,i} = \frac{2}{n} \sum_{g=1}^{n+1} X_{gi} - \frac{n+2}{n} X_{qi},$$

где $X_{g,i}$ — i -я размерная координата g -й из $n+1$ вершин рассматриваемого $(h-1)$ -го симплекса, а $X_{q,i}$ — i -я размерная координата его q -й отброшенной вершины.

Эта формула имеет аналогичное начертание и для нормированных координат вершин симплекса, но удобнее получать сразу размерные координаты зеркальной точки, которые определяют условия проведения следующего опыта на объекте.

В нашем примере в первом симплексе отбрасывается вершина 2 с наименьшим, судя по рис. 5.3, значением отклика и по формуле (5.5) находится зеркальная точка 4 второго симплекса (на рисунке порядковые номера симплексов проставлены внутри треугольников римскими цифрами). Теперь по правилу 1 в точке 4 проводится опыт, а по правилу 2 во втором симплексе отбрасывается вершина 3 и находится зеркальная точка 5 третьего симплекса. Далее таким же образом, поочередно применяя правила 1 и 2, строятся по-

следовательно симплексы IV—VII. При этом может возникнуть ситуация, предусмотренная следующим правилом.

Правило 3. Если одно и то же наихудшее значение отклика наблюдается в нескольких вершинах рассматриваемого симплекса, то вопрос об отбрасывании одной из них должен быть решен случайным образом.

Непрерывное смещение симплекса может привести к выходу новой зеркальной точки за границу допустимой области варьирования факторов.

Правило 4. Если в зеркальной точке нового симплекса нарушаются факторные или функциональные ограничения, необходимо вернуться к предыдущему симплексу и отбросить в нем худшую вершину после наихудшей. При необходимости это правило следует применять повторно, поочередно согласно ранжировке отбрасывая вершины предыдущего симплекса, пока, наконец, не будет найдена новая зеркальная точка, удовлетворяющая всем наложенным ограничениям, т.е. принадлежащая допустимой области факторного пространства.

Правило 5. Если зеркальная точка нового симплекса является его наихудшей вершиной, необходимо вернуться к симплексу предыдущего номера и отбросить в нем худшую вершину после наихудшей. При попадании точки, зеркальной к этой (второй среди плоских) вершине, в одну из реализованных ранее необходимо отбросить третью вершину с конца ранжировки вершин симплекса предыдущего номера и т. д., за исключением наилучшей. В случае неудачного перебора всех вершин вплоть до наилучшей надо вернуться к еще более раннему (на один номер) симплексу и отбросить в нем худшую вершину после наихудшей и т. д. аналогично предыдущему.

Неприятная ситуация, предусмотренная правилом 5, может возникнуть либо при расположении $(n-1)$ -мерной грани из n вершин симплекса вблизи гребня (оврага при поиске минимума) или экстремума поверхности отклика, когда («+1»)-я вершина имеет худшее значение отклика, либо из-за ошибок наблюдения. В первом случае переориентация симплекса по правилу 6 позволит продолжить движение к экстремуму, во втором — несколько затянёт его поиск.

На рис. зеркальная точка 20 восемнадцатого симплекса — наихудшая в нем, а потому по правилу 6 возвращаемся к семнадцатому и отбрасываем в нем не вершину 18 с наименьшим значением отклика, а вершину 17 — со следующим по малости значением. Аналогичная же ситуация наблюдается после реализации зеркальной точки 22 двадцатого симплекса. Значение отклика в ней — наименьшее для нового симплекса, а потому возвращаемся к девятнадцатому. Но отбрасывание в нем вершины 21 (худшей после наихудшей вершины 18) возвращает нас в реализованную ранее вершину 17 и по правилу 6 — к восемнадцатому симплексу, в котором отбрасываем не вершину 20 с наименьшим значением отклика, а вершину 21 — со следующим по малости значением. Это дает возможность построить зеркальную точку 23 нового, двадцать первого, симплекса.

Правило 6. Если какая-либо вершина сохраняется в последовательности нескольких симплексов после применения предыдущих правил, т. е. является точкой вращения симплекса, необходимо в ней и вершинах содержащих ее симплексов провести новые наблюдения отклика. Получение среди них наилучшего значения отклика вновь в точке вращения указывает на достижение области экстремума, а сама точка вращения принимается за оценку точки экстремума с точностью, зависящей от размеров симплекса.

ЛЕКЦИЯ 13

Градиентные методы экспериментальной оптимизации

Основная идея градиентных методов:

1. Движение к области оптимума осуществляется по градиенту функции отклика.
2. Критерием прекращения процедуры поиска оптимума является статистическая незначимость отличия от нуля оценки вектора градиента.

Если непрерывную функцию отклика $\varphi(\underline{x})$ разложить в ряд Тейлора в окрестностях нулевой точки 0, то, ограничиваясь лишь линейными членами, для некоторой области вблизи 0 будем приближенно иметь

$$\varphi(\underline{x}) \approx \varphi(\underline{0}) + \frac{\partial \varphi(\underline{0})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \varphi(\underline{0})}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial \varphi(\underline{0})}{\partial x_n} x_n = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n.$$

Вектор

$$\text{grad}^T \varphi = \left\| \frac{\partial \varphi(\underline{0})}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi(\underline{0})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi(\underline{0})}{\partial x_n} \right\|$$

называется градиентом функции отклика. Как следует из формулы, координаты градиента совпадают с коэффициентами $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ линейной полиномиальной модели.

Далее выясним, в каком направлении от нулевой точки 0 следует двигаться, чтобы получить максимальное приращение отклика при удалении от этой точки на некоторое фиксированное расстояние:

$$\rho = \sqrt{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + \dots + (\delta x_n)^2}.$$

Если эту задачу рассматривать как задачу на условный экстремум, когда необходимо найти такие δx_i , которые максимизируют:

$$\delta \varphi = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta x_i \text{ при } \rho = \text{const},$$

то в результате получим, что максимум $\delta \varphi$ достигается при

$$\delta x_i = \frac{\rho}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2}} \beta_i = \beta_i z, \quad i = 1 \dots n, \quad z \geq 0.$$

Эта система уравнений задает линию наискорейшего подъема как функцию параметра $z > 0$. Эта линия совпадает с направлением вектора градиента, который показывает направление наибольшей крутизны поверхности отклика, что, в свою очередь, способствует его широкому применению в различных поисковых процедурах.

На практике компоненты $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ вектора градиента неизвестны, но можно определить оценки b_1, b_2, \dots, b_n этих компонент и тем самым получить оценку градиента $\text{grad}^T \varphi = \|\ b_1, b_2, \dots, b_n \|\$, в направлении которого и совершается рабочее движение к области оптимума. При этом соотношения для изменения факторов X_i при движении по градиенту можно записать в виде

$$\delta x_i = x_i - x_{i0} = b_i z, \quad z > 0, \quad i = 1 \dots n,$$

или, переходя к размерным величинам, получим:

$$X_i = X_{i0} + (b_i \Delta X_i) z, \quad i = 1 \dots n,$$

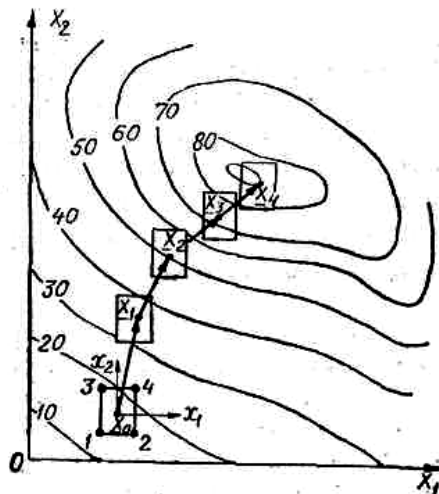
где X_{i0} и ΔX — соответственно основной уровень и шаг варьирования i -го фактора.

Для практического использования метода градиента рекомендуется следующая последовательность операций:

1. Определяется начальная точка $X_0^T = [X_{10}, X_{20}, \dots, X_{n0}]$ движения к оптимуму. В реальных условиях она обычно отвечает наилучшему из известных рабочих режимов объекта.

2. Задается шаг варьирования ΔX_i по каждому фактору X_i где $i = 1 \dots n$.

3. В начальной точке X_0 реализуется пробный эксперимент, чтобы определить направление рабочего шага. Для получения оценок b_1, b_2, \dots, b_n можно воспользоваться любым из известных способов экспериментального получения оценки линейной математической модели объекта. Наибольшее применение при этом находит ПФЭ 2^n с центром в точке X_0 , которой соответствует нулевая точка $x_0 = 0$ в нормированном факторном пространстве.



4. Задается параметр рабочего шага. Выбор его производится с учетом физических и технологических ограничений. Параметр λ следует выбирать таким, чтобы рабочий шаг не уводил за пределы области оптимума, и в то же время таким, чтобы не был слишком малым, иначе число шагов поиска области оптимума будет большим. Длина рабочего шага

$$\lambda |\widehat{\text{grad}} \varphi| = \lambda \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

5. Совершается один шаг движения в выбранном направлении

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 + \lambda \widehat{\text{grad}} \varphi(\underline{x}_0).$$

Размерные координаты точки X_1 определяются по формуле

$$X_{i1} = X_{i0} + \lambda b_i \Delta X_i \text{ для } i = 1 \dots n.$$

На этом завершается данный цикл поиска.

6. Точка X_1 является начальной для следующего этапа рабочего движения, и в ней описанная выше процедура полностью повторяется. Причем на всех этапах поиска области оптимума величины λ и ΔX_i ($i=1 \dots n$) остаются постоянными. Очевидно, что

$$\underline{x}_{h+1} = \underline{x}_h + \lambda \widehat{\text{grad}} \varphi(\underline{x}_h).$$

7. При поисковом движении модуль оценки вектора градиента постепенно уменьшается и, следовательно, уменьшается длина рабочего шага. Процедура поиска области оптимума прекращается, когда все оценки b_1, b_2, \dots, b_n становятся статистически незначимыми, т. е. когда становится статистически незначимым модуль оценки вектора градиента функции отклика

$$|\hat{\text{grad}} \varphi| \approx 0:$$

Достигнутая точка принимается за оценку точки оптимума с точностью до длины последнего рабочего шага.

У метода градиента большая скорость движения к области оптимума и точность в определении этой области по сравнению с методами Гаусса — Зейделя и случайного поиска, но меньшая помехоустойчивость. При попытке увеличить помехоустойчивость экспериментатор обычно сталкивается с необходимостью значительного увеличения и без того большого числа экспериментов. Тем не менее метод градиента применяется на практике достаточно часто в лабораторных условиях, когда уровень помех невелик.

ЛЕКЦИЯ 14, 15

Теория подобия (анализ размерностей) и особенности экспериментальных исследований в гидравлике и теплотехнике

Для правильного применения анализа размерностей исследователь должен знать характер и число фундаментальных переменных в его эксперименте. *Фундаментальной переменной* называют любую величину, оказывающую влияние на эксперимент и способную изменяться независимо от других переменных.

Если экспериментатору действительно известны все переменные, то он может сразу же преобразовать их, применив первую часть теоремы Букингема:

«Если какое-либо уравнение однородно относительно размерностей, то его можно преобразовать к соотношению, содержащему набор безразмерных комбинаций величин».

Однородным относительно размерностей является уравнение, форма которого не зависит от выбора основных единиц.

Безразмерные комбинации, о которых упоминалось в теореме Букингема, представляют собой произведения или отношения величин, составленные таким образом, что в каждой комбинации размерности сокращаются. Например, уравнение для коэффициента трения $\Delta P = f(L/D)V^2/2g$ (где L – длина трубы, D – диаметр, V – скорость течения жидкости). В этом случае можно составить три безразмерные комбинации: $\Delta P/(V^2/2g)$, f и L/D . Теорема Букингема не является столь тривиальной, как это может показаться при рассмотрении этого простого примера, и ее доказательство довольно сложно.

Можно не знать всех переменных, влияющих на эксперимент, но необходимо представлять себе, что эти переменные и связывающее их безразмерное уравнение существуют независимо от того, известны они или нет. Если не удастся получить систему безразмерных комбинаций, то это является верным признаком того, что было что-то пропущено.

В случае уравнения для коэффициента трения в его наиболее общем виде обычно представляет интерес величина ΔP . Известно, что эта величина зависит от длины трубы L , диаметра D и скорости потока V . Вес эти величины являются независимыми переменными. Хотя ускорение силы тяжести g практически величина постоянная, его также необходимо рассматривать. Легко убедиться, что такие свойства жидкости, как плотность и вязкость, являются независимыми переменными (зависящими от вида жидкости и ее температуры). Изучение внутренних поверхностей различных труб показывает, что высота неровностей поверхности e также является переменной величиной. Итак, получаем восемь фундаментальных переменных и общее уравнение можно записать в следующем виде:

$$\Delta P = \Phi(L, D, V, \rho, \mu, e, g)$$

Согласно теореме Букингема, это функциональное соотношение (если оно однородно) можно выразить через безразмерные комбинации величин. Из опыта известно, что такое соотношение имеет следующий вид:

$$\frac{\Delta P}{V^2/2g} = \Phi' \left(\frac{L}{D}, \frac{VD\rho}{\mu}, \frac{e}{D} \right).$$

Можно показать, что эти комбинации являются безразмерными, если используются совместимые единицы. Экспериментатору значительно легче найти функцию Φ' в формуле, чем функцию Φ в формуле.

Рассмотрим теперь простой способ нахождения комбинаций величин, входящих в функцию Φ . Используем так называемый релеевский метод решения размерных систем. Выразим сначала размерность переменных, описывающих систему с потерями на трение, по отношению к трем *основным единицам*: массы M , времени θ и длины L .

Название переменной	Обозначение	Формула размерности
Потери тепла в трубе	ΔP	L
Длина трубы	L	L
Диаметр трубы	D	L
Скорость потока жидкости	V	L/θ
Вязкость жидкости	μ	$M\theta^{-1}L^{-1}$
Плотность жидкости	ρ	ML^{-3}
Высота неровностей поверхности	e	L
Ускорение силы тяжести	g	$L\theta^{-2}$

Допустим теперь, что между этими величинами существует следующее соотношение:

$$\Phi(L^a, D^b, V^c, \mu^d, \rho^e, e^f, g^g) = \Delta P.$$

Подставим сюда вместо символов размерности из таблицы:

$$\Phi[L^a, L^b, (L\theta^{-1})^c, (M\theta^{-1}L^{-1})^d, (ML^{-3})^e, L^f, (L\theta^{-2})^g] = L.$$

Чтобы данное уравнение было однородным относительно размерностей, должны выполняться следующие соотношения между показателями степени:

$$\text{для } M: 0 = d + e,$$

$$\text{для } L: 1 = a + b + c - d - 3e + f + g,$$

$$\text{для } \theta: 0 = -c - d - 2g.$$

Имеем три уравнения с семью неизвестными. Упростим их, исключив e , c и b . Тогда $e = -d$, $c = -d - 2g$ и $b = 1 - a - d + g - f$. Подставляя эти соотношения для показателей степени, получаем:

$$\Phi(L^a, D^{1-a-d+g-f}, V^{-d-2g}, \mu^d, \rho^{-d}, e^f, g^g) = \Delta P.$$

Объединяя члены с одинаковыми показателями степени, легко составить безразмерные комбинации:

$$\Phi\left[\left(\frac{L}{D}\right)^a, \left(\frac{VD\rho}{\mu}\right)^{-d}, \left(\frac{e}{D}\right)^f, \left(\frac{Dg}{V^2}\right)^g\right] = \frac{\Delta P}{D}.$$

Эксперименты в области ламинарного потока дают следующую функцию:

$$\frac{\Delta P}{D} \left(\frac{Dg}{V^2}\right)^1 = 32 \left(\frac{L}{D}\right)^1 \left(\frac{VD\rho}{\mu}\right)^{-1} \left(\frac{e}{D}\right)^0$$

Окончательным результатом является известное уравнение для потерь на трение при ламинарном потоке в круглой трубе

$$\frac{\Delta P}{V^2/2g} = \frac{64}{N_{Re}} \frac{L}{D}$$

Задача о трении жидкости в трубе иллюстрирует вторую часть теоремы Букингема, используемой для проверки результатов анализа размерностей. Это так называемая *π-теорема*:

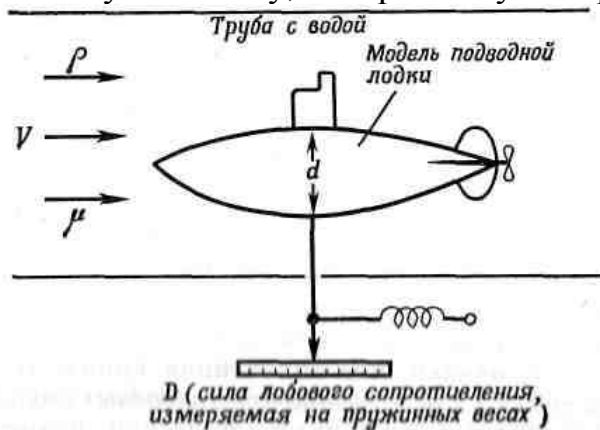
«Если существует однозначное соотношение $\Phi(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$ между n физическими величинами, для описания которых используется k основных единиц, то существует также соотношение $\Phi'(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}) = 0$ между $(n - k)$ безразмерными комбинациями, составленными из этих физических величин».

Для рассмотренного примера эта теорема справедлива. В задаче о коэффициенте трения рассматривалось восемь физических величин, и были выбраны три основные единицы.

Согласно π -теореме, число безразмерных комбинаций равно $(8 - 3) = 5$. Данное число комбинаций получено математически, хотя в процессе эксперимента потребовались лишь три-четыре комбинации.

Пример:

Рассмотрим гидродинамическую систему, изображенную на рис:



Подводная лодка с характеристическим размером d движется с различной скоростью в вязкой жидкости, испытывая силу лобового сопротивления D . В данном примере используются те же самые основные единицы: массы, времени и длины. Таблица переменных имеет следующий вид:

Название переменной	Обозначение	Формула размерности
Скорость жидкости	V	$L\theta^{-1}$
Характеристический размер	d	L
Плотность жидкости	ρ	ML^{-3}
Вязкость жидкости	μ	$M\theta^{-1}L^{-1}$
Сила лобового сопротивления	D	$ML\theta^{-2}$

Поскольку в качестве основных единиц выбраны единицы массы, времени и длины, размерность силы выводится по формуле для второго закона Ньютона. Как и ранее,

$$\Phi(V^a, d^b, \rho^c, \mu^d) = D$$

$$\Phi[(L\theta^{-1})^a, L^b, (ML^{-3})^c, (M\theta^{-1}L^{-1})^d] = ML\theta^{-2}.$$

Получаем следующие соотношения для показателей степени:

для M : $c + d = 1$,

для L : $1 = a + b - 3c - d$,

для θ : $-2 = -a - d$.

Из этих формул выразим показатели степени через d :

$c = 1 - d$, $b = 2 - d$ и $a = 2 - d$.

Уравнение примет тогда вид

$$\Phi(V^{2-d}, d^{2-d}, \rho^{1-d}, \mu^d) = D,$$

следовательно,

$$\frac{D}{\rho V^2 d} = \Phi' \left(\frac{\mu}{V d \rho} \right),$$

или и более обычной форме

$$C_d = \varphi'(N_{Re}),$$

где C_d -- известный коэффициент лобового сопротивления, зависящий только от числа Рейнольдса. Таким образом, для описания поведения подводной лодки нет необходимости вычерчивать графики зависимости лобового сопротивления от каждого из параметров в отдельности, а достаточно построить лишь одну кривую зависимости C_d от Re .

Заметим, однако, что полученная кривая будет справедлива только для *геометрически подобных* подводных лодок. Единственный характеристический размер d дает представление лишь о величине подводной лодки, но ничего не говорит о ее форме, конусности, обтекаемости и т. д. Чтобы получить общее выражение, справедливое для подводных лодок любой формы, потребовалось бы большое число размерных отношений и огромный объем экспериментальной работы. Поэтому исследователь должен стараться не делать слишком общих выводов при анализе размерностей и не пытаться применять эти результаты без должной осторожности.